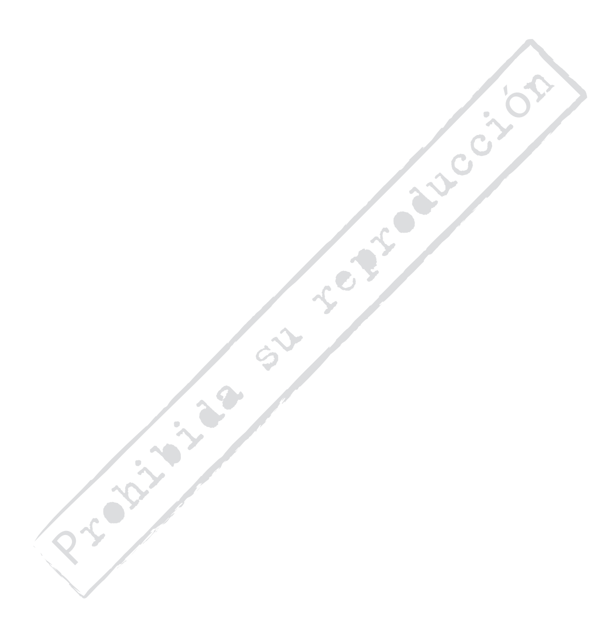
Adrián Paenza

¡Peligro! Matemática explícita



Sudamericana

Paenza, Adrián
¡Peligro! Matemática explícita / Adrián Paenza. – 1ª ed. – Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Sudamericana, 2019.
288 p. ; 22 x 15 cm. (Obras Diversas)

ISBN 978-950-07-6342-4

1. Matemática. I. Título.
CDD 510

Printed in Argentina – Impreso en la Argentina

ISBN: 978-950-07-6342-4

Queda hecho el depósito que previene la ley 11.723.

Esta edición de 2000 ejemplares se terminó de imprimir en Arcángel Maggio – División Libros, Lafayette 1695, Buenos Aires, en el mes de septiembre de 2019.

Penguin
Random House
Grupo Editorial

Dedicatorias

Yo sé que ya lo escribí antes, más precisamente ¡diecisiete veces! Como este es el libro número dieciocho, tendré que repetirme y lo hago con el mismo entusiasmo y gratitud que en el primero. Una vez más, este libro tiene estos destinatarios.

A mis padres, Fruma y Ernesto. A ellos les debo TODO.

A mi hermana Laura y a mi cuñado Daniel.

A todos mis sobrinos (y cada vez son más): Lorena, Alejandro, Máximo, Andrea, Ignacio, Paula, Santiago, Matías, Lucio, Lucas, Brenda, Miguelito, Viviana, Sabina, Diego, Sebastián, Ulises, Luz, Max, Jason, Amanda, Whitney, Mila, Bryce, Valentín, Mía, Landon, Ellie, Anderson, María José, Gabriel, Luca, Dante, Nicola y Riley.

A Carlos Griguol, León Najnudel, Héctor Maguregui y también al recientemente fallecido Luis María Bonini.

A mis amigas Teresa Reines, Ana María D'Alessio, Nilda Rozenfeld, Nora Bernárdez, Beatriz de Nava, Beatriz Suárez, Alicia Dickenstein, Carmen Sessa, Etel Novacovsky, Verónica Fiorito, Karina Marchesini, Érica Kreiter, Laura Bracalenti, Eugenia, Mercedes e Inés Bielsa, Betty Cooper, Kim Crotts, Julie Crotts, Marisa Giménez, Norma Galletti, Marianela Oroño, Carina Maguregui, Marcela Smetanka, María Marta García Scarano,

Nora Bär, Marisa Pombo, Cristina Serra Selva, Blanca Avellaneda, Montse Besa, Marta Valdano, Malena Guinzburg y Mariana Salt.

A mis tres primas: Leonor Gherschi, Mirta y Silvia Wainer.

A mis amigos Miguel Davidson, Leonardo Peskin, Miguel Ángel Fernández, Cristian Czúbara, Alberto Kornblihtt, Lawrence Kreiter, Lenny Gunsteen, Claudio Martínez, Kevin Bryson, Gerry Garbulsky, Gary Crotts, Dennis Fugh, Alejandro Fabbri, Claudio Pustelnik, Carlos D'Andrea, Víctor Marchesini, Fernando Pacini, Andrés Nocioni, Emanuel Ginóbili, Pep Guardiola, Jorge Valdano, Luis Scola, Pablo Prigioni, Julio Bruetman, Ariel Hassan, Woody González, Keith Morris, Marcos Salt, Tristán Bauer, Santiago Segurola, Ramón Besa, Fabricio Oberto, David Boodey, Matías Martin, Santi Siri y Don Coleman.

A dos personitas que no lograron vivir sus vidas, ambas interrumpidas brutalmente, que me dejaron un vacío imposible de llenar: Guido y Soledad.

A la memoria de todas mis tías: Delia, Elena, Miriam, Jane, Ñata y Elenita. A mi entrañable tío Saúl; a Manny Kreiter, Nusie Kreiter, Lola Bryson, Vivian Crotts, y mis primos Ricardo y Josi. Y a mi querido Jorge Guinzburg.

Quizás esta lista de personas y nombres sean poco significativas para usted, o directamente no tengan ningún 'peso' en su vida; sepa que sí lo tienen y tuvieron en la mía. Pero aun repitiéndome una y otra vez, para el final, la especial dedicatoria para mis cuatro guías éticos: Marcelo Bielsa, Alberto Kornblihtt, Víctor Hugo Morales y Horacio Verbitsky.

Agradecimientos

En el momento en que aparece un nuevo libro, pareciera producirse una pausa en mi vida. A este ritmo, junto a la gente de editorial Penguin Random House, nos hemos embarcado en un camino que me permite publicar un libro por año. Y es como si —justamente— una vez por año yo me detuviera para compartir parte de lo que aprendí, escuché, disfruté, pensé, viví… lo que me pareció interesante o lo que me atrapó.

Está claro que este camino no lo hago en soledad. Desde múltiples lugares del mundo, recorriendo diferentes universidades en conferencias formales, sí, pero también en cafeterías, bibliotecas, bares…, leyendo publicaciones de otros colegas, correos electrónicos de exalumnos o excompañeros, nuevos libros *o papers*, o en competencias de matemática que se desarrollan en distintos escenarios, facultades, colegios, foros, en esta suerte de vida privilegiada que termina *sacudiéndome constantemente*, produciendo un volumen de información a una velocidad que no puedo decodificar… siento que me quedo atrás y cada vez estoy más lejos. Se genera *tanto material nuevo cada segundo, literalmente*, que debería ser capaz de escribir un libro *por día*, para mantener el ritmo de lo que sucede a mi alrededor.

Pero he transado en escribir una suerte de 'sumario anual'…

y aquí estoy, esta vez en el año 2019. El libro que sigue es el reporte anual o, si me permite el oxímoron, acá estoy otra vez completando mi 'diario anual'.

¿Cómo no agradecer entonces? ¿Cómo no expresar gratitud hacia aquellos que me impactaron a lo largo de este año y me motivaron a pensar? Una vez más, usted encontrará una lista con los nombres y —en la mayoría de los casos— las *razones* que me llevan a decirles gracias.

Empiezo por los *betatesters*, las personas que leen cada historia, cada texto, cada afirmación, y evalúan si están de acuerdo, o si contiene errores (y no me refiero a errores de ortografía o de sintaxis, sino *errores* en la matemática). Son ellos los verdaderos responsables de que cada libro no sea un compendio de inexactitudes, y de allí mi gratitud eterna.

En primer lugar, a Carlos D'Andrea, que es el único que leyó *todos* los libros, *de extremo a extremo*. El camino empezó en el año 2005 y todavía sigue firme. Pero también a Juan Sabia, Carlos Sarraute, Manu Ginóbili, Gerry Garbulsky, Alicia Dickenstein y Claudio Martínez. Gracias a todos principalmente por el *tiempo* que le dedicaron y le dedican.

A quienes me ayudaron a formar y despertar mi espíritu crítico, y quienes contribuyeron a mi formación matemática: Miguel Herrera, Enzo Gentile, Eduardo Dubuc, Luis Santaló, Oscar Bruno, Ángel Larotonda, Nestor Búcari, Horacio Porta, Alberto y Pablo Calderón, Ricardo Durán, Noemí Wolanski, Teresa Krick, Fernando Cukierman, Marcela Fainbrum, Teresita Freidenberg, Leandro Caniglia, Carlos Sánchez, Ricardo Noriega, Malena Becker, Cristina López, María del Carmen Calvo, Graciela Fernández, Jorge Zilber y Matías Graña. También a Baldomero Rubio Segovia, madrileño y exdecano de la Universidad Complutense de Madrid. Y a Alex Bellos, el matemático británi-

co que publica excepcionales libros de divulgación matemática y excelentes columnas en *The Guardian*, el diario más prestigioso del Reino Unido.

A Carmen Sessa y Alicia Dickenstein, que son mis dos grandes amigas de toda la vida. El recorrido empezó cuando ambas cursaban la materia Complementos de Álgebra y Topología en el año 1974, y yo era uno de los dos jefes de Trabajos Prácticos (Néstor "Quiquín" Búcari era el otro). Sigo siempre con orgullo y admiración la trayectoria de las dos: una (Carmen), la gran referente en docencia y pedagogía en matemática en la Argentina; la otra (Alicia), una de las matemáticas argentinas más importantes de la historia… y del mundo también, tanto que fue elegida una de las vicepresidentas de la Unión Matemática Internacional, cargo que no ocupó nunca ninguna persona hispano-parlante y nacida en el Hemisferio Sur. *Chapeau!*

A un grupo de matemáticos que trabajan en diferentes universidades del mundo: Carlos D'Andrea, Juan Carlos Naranjo, Martín Sombra, Luis Dieulefait, Teresa Cortadellas, Quim Ortega y Eulalia Montoro, de la Universidad de Barcelona; Pol Naranjo y José Ignacio Burgos, en el ICMAT de Madrid; Emiliano Gómez, en la Universidad de California en Berkeley; y Pablo Mislej, en Buenos Aires.

A Pablo Coll, Gabriela Jerónimo, Cristian Czúbara, Laura Dóbalo, Ariel Arbiser, Pablo Milrud, León Braunstein y Laura Pezzatti, porque fueron ellos quienes me proveyeron muchísimas veces de *problemas* y/o *historias* para cada uno de los libros o programas de televisión.

Un lugar para mis alumnos o exalumnos: *¡siempre! ¡Para todos!* ¿Cómo saber cuál de ellas/ellos fue el que tuvo mayor impacto? ¿Y qué importancia tiene si fue el *mayor* o el *menor* si cooperaron para que yo me ilustrara con sus preguntas y me forzaron a buscar o pensar la respuesta?

¿Lo nombré a Claudio Martínez? Desde hace más de veintidós años que es uno de los compañeros de ruta más relevantes de mi vida. Lo conocí cuando me convocó a trabajar en la revista *XXI* (en ese momento), allá por el año 1997 (creo), y desde entonces trabajamos juntos en medios gráficos, radio, televisión de aire y de cable. Recorrimos el país con un programa de matemática que duró diez años: *Alterados por Pi*, y grabamos juntos durante *quince años*… sí, leyó bien, *¡quince años!* el programa emblema de la ciencia argentina, no porque lo hubiéramos hecho nosotros, sino porque fue EL programa de la comunidad científica de mi país: *Científicos Industria Argentina*, que se emitió durante catorce de los quince años por el Canal 7 o la Televisión Pública, y solo un año en Telefe. Además, como estuvo en el aire tanto tiempo, se convirtió en uno de los más duraderos de la televisión abierta argentina.

A mis agentes literarios, Guillermo Schavelzon y Bárbara Graham, por el esfuerzo y la dedicación que ponen para que los libros sean publicados no solo en mi país de origen y en español, sino para que sean traducidos e impresos en múltiples idiomas y en 'casi' todos los continentes. ¡Un verdadero logro que promueve mi infinita gratitud!

Hay un grupo de personas que quiero 'resaltar' por la disposición y el esfuerzo que hacen *siempre* para que mi trabajo sea (o haya sido) más placentero:

a) Todos mis compañeros de la editorial Penguin Random House que acompañan a Glenda Vieites y Juan Boido: Gabriela Vigo, Mariana Creo, Lucrecia Rampoldi.
b) Todos mis compañeros de El Oso Producciones, liderados por Claudio Martínez y Aldo Fernández. Me refiero a la entrañable Edy Gerber, Mario Buoco, Betina Rodríguez,

Gaby Díaz, Laura Cukierman, Ezequiel Rodríguez, Elizabet Alegre, Valeria Trevisán, Claudia Eiberman, Paola Campodónico, Dolores Bosch y Alejandro Burlaka.

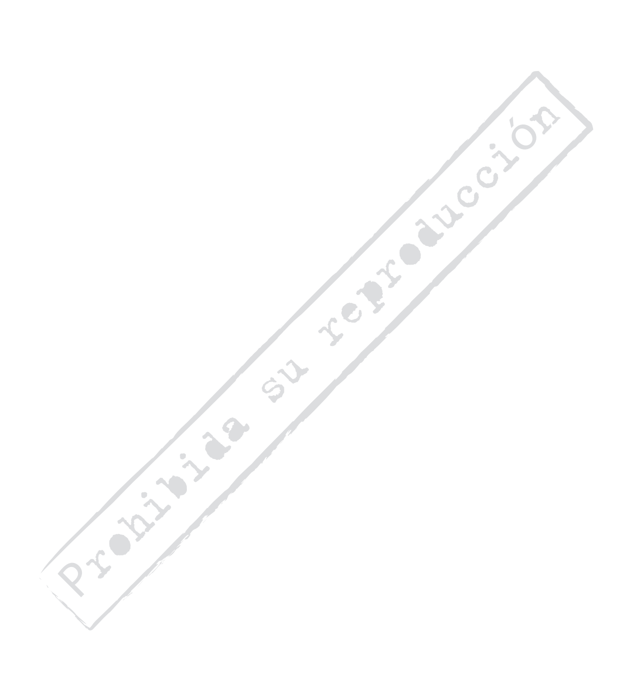
c) Todos mis compañeros de *El Cohete a la Luna*, que dirige mi querido amigo Horacio Verbitsky. Mi reconocimiento muy particular para Marcelo Figueras.

d) Todos mis compañeros de La Brújula, que lideran Woody González, Ariel y Luis Hassan.

e) Todos mis compañeros de *Página 12*, que encabezan Ernesto Tiffenberg, Hugo Soriani y Jorge Prim.

f) También mi recuerdo y reconocimiento para Carlos Díaz, de la editorial Siglo XXI, quien junto a Diego Golombek comenzaron esta apuesta que representaba promover la difusión de la matemática recreativa y que hasta hoy lleva ya dieciocho (sí, dieciocho) libros diferentes. No me olvido de Violeta Collado, otra pionera cuando empezó todo allá por el año 2004.

f) Y mi gratitud para todos los trabajadores del canal Encuentro, Canal 7 (la Televisión Pública Argentina), Paka-Paka (el canal para niños), Tecnópolis y la Universidad de la Punta en San Luis.



Prólogo

Cada una de las historias que forman parte de este libro está ligada con 'algo' que me pasó y que me llevó a escribirlas. No todo lo que veo, leo o escucho me resulta igualmente atractivo. No creo que eso le pase a nadie. Lo que me propongo es *elegir* algunas y ubicarlas dentro de un contexto, compartiendo con usted *cómo me enteré de ellas*, o qué fue lo que me motivó. O *quién* y no *qué*.

En ciertos casos, hay personas a quienes vi o escuché o leí que me sorprendieron con algo nuevo, al menos para mí. Alguna novedad. A medida que voy recorriendo el mundo, tanto real como virtual, tengo una serie de *papelitos* que guardo en el bolsillo izquierdo de mis camisas[1] en los que voy anotando la *idea* que me surgió. Si no, después me olvido. Y así es como voy juntando y

1. Es notable, pero solamente uso camisas que tengan un bolsillo pequeño en el pecho, en general, del lado izquierdo. Cuando era muy joven, solía poner allí un paquete de cigarrillos y también una lapicera y un lápiz. Con el tiempo, dejé de fumar, pero no de escribir, y aparecieron los teléfonos celulares. El *bolsillito* de la camisa siguió siendo imprescindible. Y después, en los últimos quince años, comencé a agregar *papelitos* a los que quiero acceder fácilmente. Al estilo de lo que hacía Juan Carlos Altavista, siempre tengo conmigo *papelitos*. Allí anoto *ideas*. Así de simple.

acumulando (e indexando) múltiples anotaciones con recuerdos y 'ayuda memoria'.

El otro día le comentaba a un amigo que en este momento, agosto del año 2019, mientras estoy escribiendo este prólogo, tengo aún 637 historias sobre las que no escribí. Si uno piensa que habitualmente caben entre 35 y 40 problemas por libro, eso significa que, si no anotara nada más, tengo para quince años más, o sea, quince libros más. Me apuro en advertirle a la gente de Penguin Random House, a Glenda Vieites y Juan Boido, que se queden tranquilos: no creo que viva quince años más. Eso sí: *todos* los problemas tienen alguna historia asociada, y esa historia está ligada con algún momento de mi vida. En general, suelo acordarme del lugar, de la escenografía y de las personas o persona que estaba conmigo cuando decidí anotar 'algo' en algún papelito. Eso servirá de *contexto* para la historia que quiero compartir.

Lo que sigue será una selección de algunas de ellas, y los detalles aparecerán más adelante cuando haga el desarrollo propiamente dicho. En todo caso, interprete los párrafos que aparecen a continuación como una suerte de *anuncio* de lo que 'se viene'. Acá voy.

El primer problema tiene que ver con "Un nuevo ta-te-ti". En sí mismo, como juego, el ta-te-ti existe desde hace muchísimos años. Después de jugarlo un par de veces con las reglas clásicas, resulta insoportablemente *aburrido*. Sin embargo, el año pasado (2018) sucedió algo inesperado. Me tropecé con una nueva versión: ingeniosa, creativa, diferente, que escribió Ben Orlin. Le recomiendo que no se pierda los detalles porque incorporará a su 'batería de juegos' uno que es *imperdible*. Es entretenidísimo y *no trivial* para jugar, aunque las reglas son muy semejantes a las del juego original. Después de la presentación que hice en el Museo

de Matemática de Catalunya, lo conté también en la reinauguración del aula magna del Pabellón I en la Ciudad Universitaria de la Ciudad de Buenos Aires, en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Me consta que hay muchas personas, exalumnos, profesores, colegas y amigos que ya lo han incorporado. De hecho, me contó el propio Gerry Garbulsky (uno de los *betatesters* de los libros) que ya estuvo practicando con sus hijos, detalle *no menor*. Ya verá más adelante lo que produjo uno de ellos (Juli). Moraleja: aunque no lea ningún otro problema del libro, ¡no se pierda este!

En realidad, cuando acabo de escribir el 'punto' para terminar esta última frase, advertí que estaba cometiendo un error. No me haga caso: no lea *solamente* el problema sobre el nuevo ta-te-ti. Necesita leer la historia del "Quarto".

En sí mismo, el Quarto es un juego hipersencillo. Se vende como juego, como quien juega al ludo o a las damas o al ajedrez, pero no es necesario que usted compre nada. Todo lo que necesita es una lapicera (un lápiz también sirve) y algún lugar en donde escribir. O sea, el 'con qué' y el 'en que'. El resto es totalmente prescindible.

Los amigos del Museo de Matemática de Catalunya me regalaron la caja con las piezas (tiene 16) y el tablero después de mi visita en diciembre del año 2018. Y a partir de allí, no dejé de jugar nunca más. Eso sí: en el camino, como nos suele suceder a quienes jugamos a este tipo de 'juegos', se me ocurrieron varias preguntas. Como usted verá, no todas tienen respuestas conocidas o, por lo menos, no por mí, pero eso no debería detenerla/o. El juego es muy fácil de jugar y, más allá de la experiencia que fui incorporando, quiero anticipar lo que me sucedió. La primera noche que lo jugué, *¡perdí todas las partidas!* Léame bien: no es que perdí *la mayoría*. No. *¡Perdí todas las partidas!* (a los

efectos de inventario, ahora, después de ocho meses de jugar, ya gané alguna también, pero pocas). Ah, y quienes me ganaron esa noche, *no lo habían jugado antes… nunca*. Es decir, ni siquiera puedo argumentar que ellos sabían jugar y yo no. Ninguno sabía nada antes de esa noche.

Cuando conté las reglas del Quarto en la charla a la que hacía referencia en Exactas, mucha gente se quedó pensando no solo en cómo jugar (y ganar) sino también en cómo contestar algunas de las preguntas que dejé planteadas esa noche.

Solo para mostrarle el 'tipo' de pregunta al que hago referencia, permítame invitarla/o a que piense lo siguiente: cuando usted juega al ta-te-ti común, al ajedrez o a las damas, es posible que ninguno de los dos participantes *gane la partida*.

Justamente por eso, lo que me sucedió la primera vez que jugué (al Quarto) es que… ¡ninguna partida terminó empatada! Más aún: como no estaba solo, sino que había muchísima gente, puedo asegurar que no hubo empates en *toda la noche*. La pregunta que uno tiene derecho a formularse es: *¿No hay empates en el Quarto?* ¿Será cierto que por más que uno quiera 'forzar' un empate, esto no es posible?

Fíjese lo que le sucede a usted. Ah, y uno de los episodios más maravillosos en los que me tocó participar surgió cuando le propuse a Juli Garbulsky que tratara de dilucidar él si podía haber empates o no. Lo que ocurrió fue totalmente inesperado, tanto para él como para mí. Cuando lea el texto verá lo que puede lograr el trabajo en equipo y el desenfado en enfrentar problemas con libertad y ganas. Fue además, una *lección* o una *enseñanza* para mí también. Aprendieron ellos (ya verá quienes), pero aprendí yo también… ¡sin ninguna duda!

Para avanzar, aunque no respete el *orden*, quiero compartir qué fue lo que me llevó a escribir sobre los bitcoins. No sé lo que

le pasa a usted, pero a esta altura, ya me resulta imposible vivir cualquier día de mi vida y no escuchar hablar de ellos (o ellas). ¿Qué son los bitcoins? Durante un tiempo, decidí que no debía preocuparme, que si me dedicaba a pensar y a leer lo suficiente, me iba a ser fácil entender todos los detalles.

Sin embargo, a medida que fue pasando el tiempo y el tema 'bitcoin' comenzó a hacerse cada vez más cercano, pensé que estaba llegando la hora de *dedicarme a tratar de entender*. Y allí pasó lo que era esperable. Es como si hubiera habido una voz que me decía: "¡No tan rápido compañero!".

Y no, no tan rápido. Por supuesto, uno *no necesita* conocer cómo funcionan los bitcoins, ni el origen, ni cuán seguros son, ni por qué se los llama criptomonedas, ni qué son las blockchains… ¡nada! De hecho, quizás usted maneja un auto, o viaja en él, y no necesita saber por qué funciona ni cómo. Y lo mismo le sucede con el dinero con el que anda por la vida: uno lo 'usa' (si lo tiene) y listo. ¿Se podrá hacer lo mismo con los bitcoins? ¿Hasta dónde es cierto que *son el dinero del futuro*? ¿O tendríamos que hablar de que *ya* son la tecnología que llegó, solo que somos nosotros los que estamos llegando tarde? Para una persona de mi edad (70 años hoy), quizás no sea tanto problema, pero usted, que es *muchísimo más joven*, ¿no siente que debería saber un poco más sobre ellos?

Lo que traté de hacer entonces fue escribir sobre los bitcoins, y dejé esos textos para el final del libro. Si pudiera permitirme *pedirle* un favor (de los tantos que verá en el libro), le sugeriría que me conceda lo siguiente: cuando lea ese artículo, *no abandone*. De hecho, hubo muchísimos momentos mientras leía y estudiaba para tratar de entender en los que pensé: "¡Voy a dejar esto! ¿A quién le importará leer sobre las criptomonedas?". La tentación fue muy grande pero —afortunadamente— no interrumpí.

Cuanto más me planteaba a quién le importaría que escribiera sobre los bitcoins, más me molestaba a mí.

¿Cómo es posible que delante nuestro haya una nueva tecnología que parece que va a reemplazar en un futuro *no muy lejano todo* lo que tiene que ver con el dinero en efectivo (en cualquier moneda) y la intermediación de los bancos, que promete garantizar inviolabilidad, anonimato, celeridad, transparencia, etc., y yo no sepa nada? La lista podría seguir con todos (o algunos de) estos puntos, pero si lo que describí fuera cierto, ¿no sería razonable que uno (usted o yo) estuviéramos informados de qué se trata?

Me apuro a advertirle que aunque lea todo el capítulo dedicado a los bitcoins, no saldrá hecho un 'experto' en ellos (ni mucho menos); pero sí le servirá como una primera aproximación a saber de qué se tratan. Con eso solo, ya me quedo más que satisfecho.

En el libro hay dos textos inspirados en el matemático británico Alex Bellos. Alex vive en Londres, escribió varios libros de divulgación matemática (como este que usted está leyendo), pero además fue corresponsal en Sudamérica del diario más prestigioso de Inglaterra: *The Guardian*. Como tal, estableció su base por cinco años en Río de Janeiro, y viajó repetidamente a la Argentina. De hecho, Alex tiene parientes en nuestro país, más precisamente en Tucumán. Nos hemos encontrado varias veces en diferentes lugares del mundo. Yo he tratado de cooperar con él con problemas que publicó en el diario y yo le pedí la autorización correspondiente para utilizar algunos de los suyos a lo largo de los años. En particular, en este libro hay específicamente dos que son totalmente diferentes.

El primero, al que llamé "La bolsa con el millón de dólares de Alex Bellos", es una suerte de juego en donde se trata de 'en-

cerrar' al rival que está tratando de esconder el dinero. La idea es elaborar una estrategia que permita encontrar el millón, por más que su oponente intente negarle el lugar en donde se esconde, *siempre* en un número finito de pasos.

El segundo es decididamente extraordinario. Yo lo llamé "Un *placer* egoísta" y Alex me dijo que lo encontró en Japón, diseñado específicamente por Nob Yoshigahara (cuando llegue a ese punto en el libro, entenderá quién es Yoshigahara). El problema es tan sencillo como *espectacular*. Me tuvo a mí y a muchísimos amigos de diferentes lugares pensando mucho tiempo. Varios querían darse por vencidos y no pensar más. Les rogué, literalmente, que no lo hicieran. Que se olvidaran por unos días para dejar que el problema 'marinara' en alguna parte de su conciencia. Y créame que *todos… sí, todos* (mis amigos) terminaron resolviéndolo. Mi consejo entonces es el mismo para usted: léalo con paciencia, verá que es hipersencillo y la solución es aún más sencilla. Sin embargo, por alguna razón que ignoro, nos es *imposible* (virtualmente) encontrar la respuesta en forma inmediata. ¿Por qué nos sucederá esto? Usted verá que cuando la encuentre, se quedará pensando: ¡¿Cómo puede ser que no se me ocurriera antes?! Increíble.

En este libro le voy a proponer que piense sobre dos paradojas: la del *extorsionador* y la de cómo hacer para ganar un auto votando por lo que uno *no cree*. Es raro, ¿no? Me enteré de la primera, hace más de una década, en una entrevista que le hice a Robert Aumann en Buenos Aires para la televisión pública, específicamente para el programa *Científicos Industria Argentina*. Aumann llegaba al país después de haber ganado el premio Nobel en Economía. El planteo me lo hizo —lamentablemente— fuera de cámara y yo me fui olvidando de escribirlo. Me había propuesto hacerlo en el siguiente libro (el de 2010), pero lo fui

posponiendo hasta que me olvidé completamente. Una década después (¡¡¡!!!) me acordé… Le propongo que lo lea con atención, porque es sencillamente increíble y además exhibe como pocas veces la conducta del ser humano. Somos impredecibles, raros, irracionales, injustos, arbitrarios y, además, *todo lo contrario*. Depende de las circunstancias y ni siquiera somos consistentes con nosotros mismos.

Siempre recuerdo una frase (que ya conté en otras oportunidades) que le escuché a Eduardo Dubuc, uno de los mejores matemáticos argentinos de la historia. Estábamos en una reunión de claustro en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA. Eduardo recién había llegado a la Argentina, después de varias décadas en el exterior (Francia, Canadá y Estados Unidos principalmente). Su español se había deteriorado y, en principio, hablaba *con acento*. No es que hablara mal ni mucho menos, solo que ya parecía que su idioma madre había desaparecido. Sin embargo, no es ese el motivo de la anécdota. En la reunión, cada uno de los profesores que quería hablar y participar activamente de la discusión (obviamente no recuerdo el tema) le pedía al director del Departamento que escribiera su nombre en una lista, la que comúnmente se llama 'lista de oradores'.

Cada uno tenía cinco minutos para exponer su postura. Cuando le tocó el turno a Eduardo, dijo: "Voy a decir algo, pero no sé si voy a estar de acuerdo conmigo mismo". ¡Frase espectacular si las hay! A mí me marcó toda la vida, y la uso sistemáticamente. Se la conté esa misma noche a Víctor Hugo en una cena que teníamos después de un programa de radio. A partir de allí, él también se la apropió. No tengo claro que el propio Eduardo se acuerde, pero nosotros dos, Víctor Hugo y yo, seguro que sí.

Dicho todo esto, cuando llegue a leer "La paradoja del extor-

sionador", espero que se sorprenda como me sorprendí yo cuando la escuché. Más aún: en principio, no podía creer que eso pudiera suceder. A lo largo del tiempo, y recordando algunos episodios *propios*, de mi vida personal, entendí que *puede* ocurrir, y al día de hoy, advierto que sucede *muchas más veces* de las que a mí me gustaría creer, y con personas que —a priori— me hubiera resultado imposible imaginar tomando esa posición. Aproveche el texto para ver cómo puede relacionarlo usted con *su propia vida*.

El caso de la votación para tratar de ganar un auto eligiendo —casi— públicamente lo que uno no quiere o no piensa es verdaderamente notable. De hecho, hay una referencia al brillante economista John Maynard Keynes que ha dado lugar en la historia a grupos de pensadores que adhieren a su filosofía (o ideología) y a quienes se reconoce como *keynesianos*. Es fácil de entender y me puso (y casi seguramente la/lo pondrá a usted también) frente a una situación en la cual uno no sabe bien qué es lo que debería hacer: ser consecuente con lo que uno piensa o 'adaptar' sus predilecciones (o incluso principios) a la conveniencia del momento.

No quisiera terminar esta suerte de 'promoción' de lo que aparece en el libro, sin mencionar una historia verdaderamente *fascinante*. Tiene que ver con la utilización de técnicas actuales para decidir 'algo' que en otro momento hubiera sido directamente imposible. Me explico: hay una canción de los Beatles muy conocida ("En mi vida" o "In My Life", si usted prefiere) que es fácilmente reconocible. Si la estuvieran reproduciendo en este momento en algún programa de radio, estoy seguro de que usted sabría muy bien a qué canción me refiero. Lo notable es que dos de los Beatles se adjudican su autoría: John Lennon y Paul McCartney. Nunca se pudieron poner de acuerdo entre ellos so-

bre quién había sido el que escribió la música. Bien. Cuando usted lea ese texto, verá lo que hizo un grupo de científicos para ‘ayudarlos’ a decidir y, créame, es verdaderamente espectacular lo que hoy, con técnicas que no existían hace un lustro (cinco años), podemos dilucidar y, de esta manera, concluir algo que ni ellos mismos pueden (o podrían, porque Lennon murió) afirmar.

Siguiendo con la evolución tecnológica, no se pierda la historia que llamé “La Revolución”. Allí relato lo que está sucediendo actualmente con los deportes, con la forma de diseñar estrategias para jugarlos y con los *diferentes modos* de ser espectador… sí, *espectador*: ¿cómo *mirar* un partido de cualquier deporte por equipos de manera tal de saber en tiempo real qué le convendría hacer al jugador que lleva la pelota de acuerdo con la posición de sus compañeros y de los rivales? Literalmente, es de ciencia ficción, y no me estoy refiriendo al *futuro*. No. Estoy hablando de algo que sucede hoy y, muy en particular, en la NBA.

No puedo hacer una descripción exhaustiva de todas las historias que aparecen en el libro, pero dejé para el final un problema que me tuvo *enganchado* y *abrumado* durante un tiempo, y lo mismo le sucedió a toda la gente a la que se lo planteé. Cuando digo ‘toda’ me refiero a *todos*… *¡sin excepción!* De hecho, como usted podrá leer más adelante, en la fiesta que se hizo en San Antonio para despedir al mejor jugador argentino de básquet de la historia, y muy posiblemente al mejor *deportista* argentino de la historia, Manu Ginóbili, Manu me pidió que contara el problema a las personas que habían concurrido a la cena. Si dijera que todos le dedicaron horas estaría mintiendo: no fueron todos, pero sí puedo afirmar que hubo un grupo *enorme* de los amigos de él que estuvieron debatiendo, discutiendo, escribiendo en servilletas, en pequeños trozos de papel, buscando alternativas para tratar de resolverlo, que terminó siendo conmovedor. No había

vivido *nunca en mi vida*, una situación semejante. A propósito, el problema se llama “El elefante, las bananas y el puente”.

Si usted tuviera que elegir *una sola* de todas las historias, yo le propondría que eligiera esa y le dedicara tiempo para pensar. Verá que la/lo tendrá entretenida/o y pensando por muchas horas, salvo, claro está, que se le ocurra la solución en forma inmediata… pero teniendo en cuenta lo que nos pasó a *todos*, es poco probable que eso ocurra.

Como habrá detectado si es que llegó hasta acá en la lectura de este prólogo, estoy entusiasmado con el material. Escribí varias veces que no soy un locutor a quien le ‘pagan’ para que diga que un producto es bueno y que merecería que usted lo comprara, y por supuesto no tengo nada con los locutores. Pero la diferencia es que a mí no me paga nadie para que yo escriba que *algo me gusta cuando no está claro que sea cierto*. Si le propongo que lea algo es porque *a mí me interesó mucho*, me atrapó, me entretuvo, me hizo pensar, me hizo dudar, me hizo conversar con gente y, sobre todo, me dan (o dieron) ganas de compartirlo. Y de eso se trata: de encontrar dentro de uno, el placer de tener un problema en la cabeza que hasta acá uno no ha podido solucionar… aún. Tolerar la frustración de no encontrar la solución en forma inmediata y aceptar nuestras falibilidades.

Eso sí: cuando uno *entiende* el problema, cuando uno *llega* a la solución, el *placer personal es inigualable*.

Ojalá que usted pueda disfrutar al leerlo, tanto como yo al escribirlo.

Un nuevo ta-te-ti[1]

En el año 2018, en un viaje que hacía por España, estaba preparando una charla para presentar en el Museo de Matemática de Barcelona, o mejor dicho, de Catalunya[2]. Quería incluir una idea que me pareció genial y que tiene que ver, aunque parezca

1. Si bien yo uso el nombre "ta-te-ti", sé que en diferentes partes del mundo recibe nombres muy diferentes, aun en español. Por ejemplo, en España se lo suele llamar "tres en línea". En México, "gato". En inglés, se lo conoce como "Tic-Tac-Toe". Le sugeriría que si no reconoce ninguno de estos nombres, siga leyendo el artículo y podrá deducir cuál es el nombre con el que usted ha jugado, no importa en qué parte del mundo haya nacido.

2. Quisiera recomendarle FUERTEMENTE que si tiene posibilidades de visitar este museo, no deje de hacerlo. Es un lugar *espectacular*, uno de los mejores lugares para 'bañarse' en 'este tipo de cultura'. Es verdaderamente subyugante y voy a usar la palabra que me parece más apropiada: ***adictivo***. Una vez que uno entró y recorre las distintas salas, *no se pude ni se quiere ir*. Créame: ¡vale la pena! La dirección es Palau Mercader, Parc de Can Mercader, Carretera Hospitalet s/n, 08940 Cornellà de Llobregat, Barcelona, España, +34-665-23-34-48, https://mmaca.cat/. Los responsables/directores/autores intelectuales son Josep Rey, primer presidente de la Asociación MMACA, autor y constructor de la mayoría de los módulos de la exposición; Manuel Udina, también fundador de la Asociación; y Guido Angelo Ramellini, otro de los fundadores. Mi respeto y gratitud enorme por haber hecho con un presupuesto exiguo uno de los mejores museos de matemática del mundo.

mentira, con el viejo y conocido ta-te-ti. Voy a suponer que si usted está leyendo estas líneas, sabe de qué hablo (el ta-te-ti); al mismo tiempo, voy a suponer que es un juego que en realidad *nunca tuvo un atractivo real*, porque 'casi' junto con las reglas, uno descubre que no vale la pena jugarlo: hay una estrategia para que cualquiera de los dos participantes *no pierdan nunca* (siempre y cuando jueguen 'bien').

Naturalmente, si un juego viene con la garantía de que uno *nunca va a perder*, ¿para qué jugar entonces?, ¿dónde está la gracia?

A lo largo de los años, conocí diferentes 'variantes', agregando más cuadrados a la grilla (que originalmente es de 3×3) o incluso 'cambiando' las reglas. Por ejemplo, uno puede 'pedir' que quien hace el movimiento inicial, no pueda jugar en la casilla del medio, o hasta decidir que el 'perdedor' del juego sea aquella persona que logre tener 'tres en línea'. O sea, lo que en el juego clásico resultaría una posición ganadora: hacer al revés e indicar que quien lo logra… ¡pierde!

Estoy seguro de que hay más alternativas y no tengo claro que yo las conozca a todas (ni mucho menos), pero en ese viaje al que hacía referencia, tenía en mis manos un artículo que escribió Ben Orlin[3]. Ni bien empecé a leerlo, sentí una suerte de 'amor a primera vista'. No conocía al autor, no conocía su trabajo, pero de inmediato sentí que estaba frente a algo diferente. Mi inten-

---

3. Ben Orlin es un matemático norteamericano, nacido en Massachusetts, profesor de colegio secundario. Vivió en Inglaterra (en Birmingham) en donde fue también fue profesor de enseñanza media y volvió a los Estados Unidos hace relativamente poco tiempo después de enseñar en Gran Bretaña. De *todos* los matemáticos que conocí a través de su producción, es POR LEJOS el mejor *didacta* y quien mejor representa *todo* lo que yo creo que habría que hacer en cualquier curso en donde haya maestros/profesores y alumnos.

ción es, por un lado, contarle sobre el 'nuevo' ta-te-ti y, por otro, sugerirle que tenga siempre un 'ojo atento' al trabajo de él. Pero, para variar, me desvié.

Acá va la propuesta de él, que por lo que leí, no es original, no la inventó él, pero a los efectos, es totalmente irrelevante. Una última advertencia: ¡créame que esta variante del ta-te-ti es decididamente ESPECTACULAR!

Habitualmente, uno tiene una grilla de 3 × 3 (como la de la Figura 1).

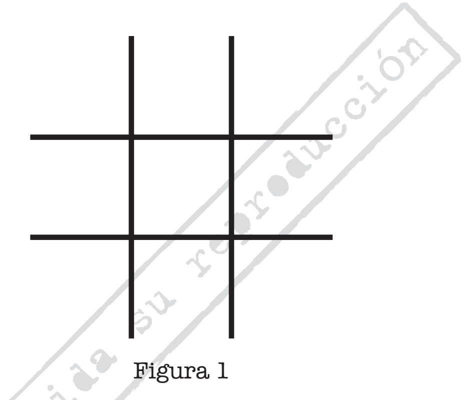


Figura 1

El 'nuevo' ta-te-ti consiste de una grilla de 9 × 9, pero en cada cuadrado hay un ta-te-ti original (como se ve en la Figura 2). Las reglas son las siguientes (muy sencillas). El ganador será quien logre 'ganar' tres de los cuadrados grandes y formar (como en un ta-te-ti convencional) tres en línea, ya sea en forma horizontal, vertical o diagonal.

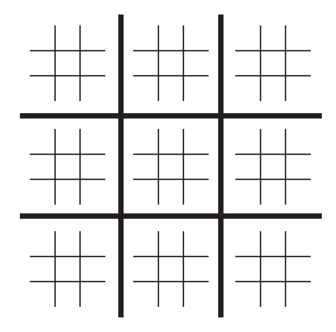


Figura 2

Si yo estuviera en su lugar leyendo estas líneas pensaría: "¿Y en qué consiste el 'nuevo' ta-te-ti? ¿En jugar *nueve* ta-te-ti simultáneamente? ¿Dónde está la novedad?".

Y usted tendría razón, pero le pido que me tenga un poquito de paciencia y verá que no es así. Es que aún *¡no terminé con las reglas!* Los jugadores no puede jugar de cualquier forma, como sería en un ta-te-ti convencional, sino que deben ir 'forzando' en qué lugar de la grilla tiene que jugar el otro. Acompáñeme por acá.

Voy a llamar X y O a las dos personas que juegan (por razones obvias). Suponga que el jugador X empieza poniendo su 'cruz' en el cuadrado grande de la izquierda, arriba de todo, tal como se ve en la Figura 3. Fíjese el 'lugar' en donde puso la X… (hágame caso por favor: mire un instante la figura). ¿Ve dónde puso la cruz? La puso *dentro* del cuadrado grande que está arriba a la izquierda, pero en ese 'tablerito', puso la cruz en el extremo derecho, *arriba*.

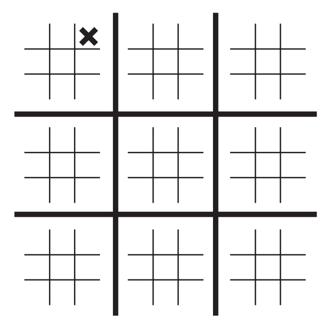


Figura 3

¿Por qué es importante esto? Al haber jugado allí, las nuevas reglas dicen que quien juega con las O, tiene que poner una de ellas (una 'O'), en el cuadrado *grande* que está arriba a la derecha, como se ve en la Figura 4. Yo puse una flecha para indicar en qué tablero tiene que jugar el segundo participante. Dentro de ese tablerito, puede jugar donde prefiera. Yo la puse en el centro.

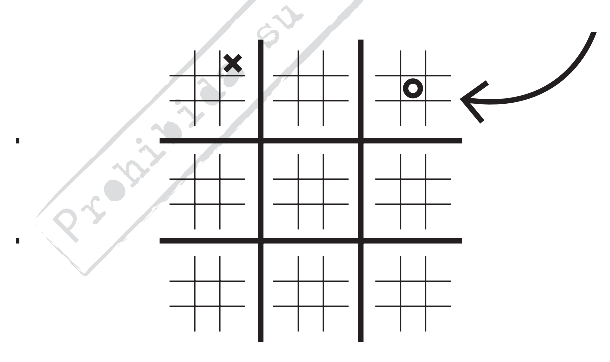


Figura 4

Al llegar acá, le toca jugar nuevamente a X, pero como O jugó en el *centro* del tablerito en donde estaba jugando, esto obliga a que X juegue en el tablerito que está en el medio del tablero grande (ver Figura 5, en donde también puse una flecha).

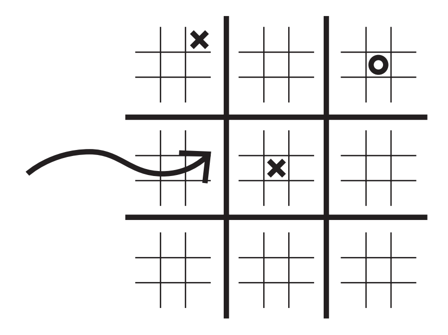


Figura 5

Como X jugó *también* en el centro, esto significa que ahora O *tiene que jugar en el mismo tablerito*, el del centro, y poner allí alguna O. Confronte todo con las diferentes figuras y trate de seguirme, ya falta poco. Al llegar acá, le *toca* una vez más jugar a X, y está *obligada* a jugar en el tablerito que está ubicado en el extremo derecho, arriba.

En la Figura 6, puse una O con una flecha para distinguir la movida. La ubiqué, una vez más, en el extremo derecho arriba, *forzando* a O a que juegue en el mismo tablero.

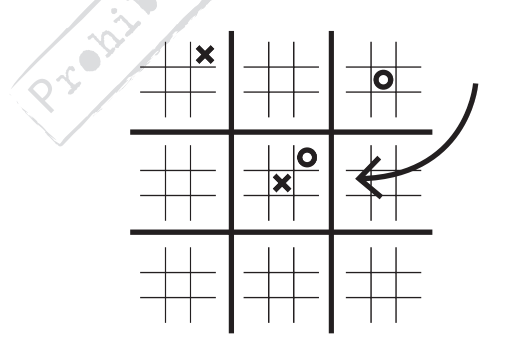


Figura 6

Creo que a esta altura están claras las reglas del juego: se van alternando, como en un ta-te-ti original, pero la regla más importante indica que una vez que uno de los dos juega, ubica su 'marca' en alguna parte de un tablerito *chico*. La siguiente jugada tendrá que hacerla el rival, pero jugando (dentro del tablero grande) en el tablerito que le indicó su oponente. Al 'jugar' uno de ellos, está indicándole al oponente en cuál cuadrado del tablero grande hacer su marca. La elección entonces *no es libre*.

Como escribí antes, *gana* quien es capaz de ocupar *tres* en línea de los cuadrados del tablero grande, y para hacerse acreedor (o acreedora) de ese cuadradito, tiene que haber ganado el 'tablerito' que allí figura.

Por supuesto, y como suele suceder *siempre* en matemática, la *única* manera de entender el juego y las dificultades que presenta es ¡jugándolo! ¡Con prueba y error! Probando y equivocándose, perdiendo muchas veces hasta *entender qué es lo que conviene hacer, qué es lo que le hubiera convenido hacer o aprender de lo que hizo la o el rival.*

Yo podría escribir y escribir sobre potenciales problemas que se plantearán si usted se decide a jugarlo, pero *nada* reemplaza la experiencia de hacerlo.

Una pregunta técnica que podría surgir: ¿qué pasa si, de acuerdo con lo que jugó el rival, usted se viera 'obligado' a jugar en un tablero que ya fue 'conquistado' o 'ganado' (ya sea por usted por su oponente)? En ese caso, usted está libre de jugar donde quiera pero, al mismo tiempo, estas reglas que escribí son las que leí en el artículo de Ben Orlin. Si a usted le parece que es injusta (la regla), cámbiela y juegue con las que usted (o ustedes) decida/n. No hay nada que sea ilegal. Al contrario: la belleza está en poder *uno* ser capaz de crear reglas que no existían antes

y eventualmente disfrutar de elaborar estrategias cuando no hay *nada* escrito al respecto.

Para terminar, al margen de proponerle que lo juegue (yo lo hice y es muy divertido), quiero agregar algo que escribió el propio Orlin y que me pareció ¡ma-ra-vi-llo-so![4]: "La diferencia entre jugar al 'viejo y convencional' ta-te-ti y este ta-te-ti es la misma que hay entre *aprender la matemática que se enseña en el colegio con la verdadera matemática*".

No recuerdo haber leído nada más significativo que esta parte del texto del cual extraje el juego. No sé si darle *todo* el crédito a Ben Orlin, pero es irrelevante, lo que más me interesó es la frase: ser capaz de proponer algo que muestre la enorme distancia que hay entre la percepción que la gente tiene (y con razón) sobre la matemática que aprendió en el colegio y la que puede disfrutar si juega a este juego (o a cualquier otro equivalente). ¡Ojalá que pueda disfrutarlo!

4. Por supuesto, es solamente *mi* opinión. Como usted verá a lo largo del libro, en múltiples oportunidades se filtrará mi 'manera' de pensar y/o apreciar ciertos problemas (por sobre otros), pero aunque usted no necesite de esta sugerencia mía, *siéntase en total libertad en disentir con TODO*. Eso transformará estos textos en material interactivo, que es lo que yo quisiera lograr: motivarla/o a que usted exponga o *se* exponga a sus ideas y no necesariamente *acepte* las mías.

Quarto

En otra parte de este mismo libro, hice referencia al Museo de Matemática de Catalunya, ubicado en las afueras de Barcelona. Aprovecho —una vez más— para sugerirle que si tiene oportunidad, no deje de ir. Es un museo extraordinario. Dicho esto, en la visita de diciembre del año 2018 me acompañó como siempre mi querido Carlos D'Andrea. Después de la charla, los organizadores nos fueron mostrando las distintas salas, y como un museo moderno que se precie de ser 'de avanzada', virtualmente *todo* es interactivo. Es difícil irse. Una vez que uno eligió alguna actividad, cualquiera sea esta, se hace muy complicado abandonar y sumergirse en alguna otra. En fin, creo que está claro que me quedé con una extraordinaria impresión. Encima, cuando nos íbamos, varias personas se acercaron hasta la puerta y me regalaron un 'juego'. El juego estaba dentro de una caja y me preguntaron si lo conocía. Me fijé en el nombre: QUARTO, así, con una 'q' inicial. Dije que no, y me lo llevé. Por supuesto, antes de irme de Barcelona, como no podía trasladar la caja, la abrí y leí las instrucciones, y quisiera compartirlas acá. A esta altura me permito decir que es un juego muy peculiar, de reglas muy sencillas, pero que cada 'partida' (cosa que aprendería después) sirve para elaborar una estrategia, y aunque sea solamente por esa propiedad, ya vale la pena jugarlo. Me explico.

De entrada me produjo una gran curiosidad leer que el juego fuera inventado por un matemático. Para ser más precisos, por el matemático suizo Blaise Müller en el año 1991. Juegan dos participantes (como si fuera una partida de ajedrez) y lo hacen sobre un tablero de 4 × 4. A partir de acá, le pido que preste atención a la descripción que voy a hacer sobre las 'fichas' con las que se juega. Son 16 fichas *todas distintas* y están clasificadas de acuerdo con sus diferentes características. De estas 16 fichas:

8 son blancas
8 son negras
8 son 'altas'
8 son 'bajas'
8 tienen la 'tapa redonda'
8 tienen la 'tapa cuadrada'
8 son huecas
8 son sólidas.

Es fácil concluir entonces, que las 16 piezas son *todas distintas*. Dicho esto, como en cualquier juego de estas características, los participantes van 'alternando' el turno en el que juegan.

Las 16 piezas están ubicadas fuera del tablero, de manera tal que en el momento de empezar, el tablero está vacío.

Curiosamente, todavía no dije cuál es el objetivo del juego, pero lo escribo ahora: el propósito de cada jugador es lograr ubicar *cuatro piezas —con alguna de las características que describí antes— en línea*, ya sea horizontal, vertical o cubriendo alguna de las dos diagonales[5].

5. Una variante del Quarto. Además de 'ganar' el juego quien ubica cuatro piezas de la misma 'categoría' en línea horizontal, vertical o diagonal, Blaise

Por ejemplo, un jugador gana la partida, si logra poner en una fila, cuatro fichas blancas, cuatro fichas huecas, cuatro fichas bajas o cuatro fichas redondas.

Luego se sortea cuál de los dos participantes empieza el juego (por ejemplo, tirando una moneda). Pero lo EXTRAORDINARIO y lo que sirve para *diferenciar* el juego es lo siguiente. Supongamos que vamos a jugar usted y yo. Sorteamos y gana usted. Bien. Usted empezará y podrá elegir en dónde ubicar la primera ficha, pero la *DIFERENCIA está en que la ficha que USTED va a jugar la voy a elegir* YO. Es decir, usted decidirá dónde poner la ficha, pero yo voy a seleccionar qué ficha tendrá que jugar usted.

Es muy importante señalar que su oponente elige *primero* la pieza que usted tiene que jugar y después usted tiene la libertad de elegir *dónde* ubicarla. Y esta característica, sigue sosteniéndose a lo largo de todo el juego. Cada vez que me toca mi turno, usted elegirá una de las fichas que están al costado del tablero y yo tendré que ubicarla (y recíprocamente). La *única* decisión de cada jugador es la *posición* de la ficha, pero la pieza será seleccionada por el *otro* jugador.

Otra curiosidad es que las fichas que están disponibles pueden ser usadas por cualquiera de los dos y no como sucede en el ajedrez o las damas en donde uno de los participantes juega con las blancas y otro con las negras. No, acá las piezas están disponibles para ser usadas por cualquiera de los dos.

Supongo que usted se estará preguntando ¿por qué habría de describir un juego en el medio de un libro? ¿Qué tiene de par-

---

Müller, el inventor, sugiere —eventualmente— agregar otras posibilidades. Por ejemplo, algún cuadrado de 2 x 2 en cualquier parte del tablero. Como ve, las reglas están *abiertas* y cualquier alternativa que se le ocurra a usted, tiene tanto valor como las del matemático suizo.

ticular? Y tiene toda la razón del mundo, pero quiero contarle una experiencia particular.

Desde el momento en que me regalaron el juego, yo no había tenido oportunidad de jugarlo. En la casa de mi amigo David Boodey, en Chicago, y aprovechando que era su cumpleaños, yo había decidido regalarle el juego. El día del festejo, después de cenar, David me dijo: "¿No sería esta noche una buena oportunidad para que abramos la caja y juguemos?".

Le contesté que me parecía una excelente idea, y lo bueno de esa noche es que ninguno había jugado nunca: éramos todos neófitos. Aprendimos las reglas muy rápidamente y empezamos a jugar. Ocho de los invitados decidimos jugar. El resto prefirió mirar. Cada partida dura —relativamente— poco tiempo, por lo que no se hizo aburrido tener que esperar. La condición que pusimos fue que quien ganara la partida, seguiría jugando, mientras que el perdedor, se pondría en una suerte de fila y esperaría a que le volviera a tocar el turno.

Dicho todo esto, quiero contar lo que me pasó: ¡perdí todas las partidas que jugué! ¡Todas! No es que perdí la mayoría: ¡las perdí todas!

Tampoco esto sería digno de ser resaltado. En definitiva, me alegró que me hubiera pasado, para que todos en la fiesta me creyeran que yo era tan neófito como ellos.

Pero lo que realmente me llamó la atención fue que ¡todas las partidas que jugamos tuvieran un ganador! ¿Qué quiero decir con esto? Habiendo jugado tantos partidos, ¿cómo pudo ser ninguno hubiera terminado en *empate*? De hecho, este juego se parece mucho a nuestro ta-te-ti o al que se conoce como 'cuatro en línea'. En cualquiera de los dos, hay situaciones en donde se producen empate. Tanto fue así, que cuando terminó la noche me quedé dudando: ¿habrá posibilidades de empatar? ¿O es que *siempre* hay un ganador?

Para dilucidarlo, no necesitaba rivales, ni tener el juego propiamente dicho. Solo tenía que pensar. Eso hice. Y eso es lo que quiero presentarle en esta sección del libro con una pregunta: ¿usted qué piensa, puede haber empates?

A esta altura preferiría dejarle la inquietud, y proponerle (como siempre) que no lea el texto que sigue. Es mucho más entretenido que lo piense por su cuenta que leer lo que hice yo.

Algunas reflexiones

Me llevé la idea conmigo. Sabía que no lo pensaría esa noche, pero como al día siguiente me embarcaría hacia la Argentina, me pareció una excelente oportunidad pensar en el avión durante el viaje de retorno. Me preparé para 'buscar' una solución al problema. ¿Qué quiero decir con una *solución*? Para que nos pongamos de acuerdo (usted y yo), voy a llamar *solución* a cualquier disposición de las 16 piezas en el tablero de manera tal que *no haya un ganador*. ¿Se podrá?

A todo esto, al avión no me llevé el juego propiamente dicho. Por lo tanto, tendría que pensar alguna forma de 'modelar' el problema para no necesitarlo físicamente. Entonces imaginé un modo que quiero escribir acá, pero me apuro en aclarar que lo que voy a proponer es solamente UNA potencial manera de 'imaginar' el problema. No pretendería que a usted se le ocurra la misma, ni mucho menos. Es por eso que al leer lo que sigue, usted tiene todo el derecho de pensar: "¡A mí nunca se me hubiera ocurrido eso!". Y es perfectamente comprensible. Es muy probable que si fuera al revés, y yo tuviera que leer lo que pensó usted o la forma que eligió, difiera de la mía y, por lo tanto, estoy seguro de que me costaría mucho más trabajo seguirla/o.

Hechas todas estas aclaraciones, esto fue lo que pensé.

Hay 16 piezas distintas y cada una cumple con una de cuatro características: alta o baja, blanca o negra, hueca o sólida, redonda o cuadrada. Si las piezas fueran *nada más* que blancas o negras (como las damas), yo las podría llamar B o N, o podría ponerles 0 o 1. Usaría el número 0 si son blancas y el 1 si son negras. Si en lugar de *una* característica, hubiera que considerar dos, digamos color y altura, yo podría poner Blanca-Alta, Blanca-Baja, Negra-Alta y Negra-Baja. Otra vez, podría utilizar números para abreviar. Como hice antes, podría ponerles un 0 Blancas y un 1 a las Negras, pero ahora debería agregar otra vez un número 0 o 1 para decidir si son altas o bajas. Podría llamar 0 a las altas y 1 a las bajas. En ese caso, quedarían cuatro pares: (0,0); (0,1); (1,0) y (1,1).

(0,0) = (Blanca, Alta)
(0,1) = (Blanca, Baja)
(1,0) = (Negra, Alta)
(1,1) = (Negra, Alta)

Aplicando el mismo criterio, lo hago extensivo a las cuatro características:

Blanca = 0 (en el primer lugar de la cuaterna)
Negra = 1 (en el primer lugar de la cuaterna)
Alta = 0 (en el segundo lugar de la cuaterna)
Baja = 1 (en el segundo lugar de la cuaterna)
Redondo = 0 (en el tercer lugar de la cuaterna)
Cuadrada = 1 (en el tercer lugar de la cuaterna)
Hueca = 0 (en el cuarto lugar de la cuaterna)
Sólida = 1 (en el cuarto lugar de la cuaterna)

En ese caso estas serán las 16 piezas:

(0,0,0,0) = (Blanca, Alta, Redonda, Hueca)
(0,0,0,1) = (Blanca, Alta, Redonda, Sólida)
(0,0,1,0) = (Blanca, Alta, Cuadrada, Hueca)
(0,0,1,1) = (Blanca, Alta, Cuadrada, Sólida)
(0,1,0,0) = (Blanca, Baja, Redonda, Hueca)
(0,1,0,1) = (Blanca, Baja, Redonda, Sólida)
(0,1,1,0) = (Blanca, Baja, Cuadrada, Hueca)
(0,1,1,1) = (Blanca, Baja, Cuadrada, Sólida)…

Antes que yo siga, ¿no estaría usted en condiciones de describir las ocho que faltan? Estoy seguro de que sí.

Sigo con las ocho que faltan:

(1,0,0,0) = (Negra, Alta, Redonda, Hueca)
(1,0,0,1) = (Negra, Alta, Redonda, Sólida)
(1,0,1,0) = (Negra, Alta, Cuadrada, Hueca)
(1,0,1,1) = (Negra, Alta, Cuadrada, Sólida)
(1,1,0,0) = (Negra, Baja, Redonda, Hueca)
(1,1,0,1) = (Negra, Baja, Redonda, Sólida)
(1,1,1,0) = (Negra, Baja, Cuadrada, Hueca)
(1,1,1,1) = (Negra, Baja, Cuadrada, Sólida)

Creo que queda claro entonces que uno *no necesita tener ni el juego ni el tablero*. Ahora estamos en condiciones de 'pensar' el problema usando estas cuaternas.

Como siempre, yo tengo la tentación de permitirle que usted *trabaje por su cuenta*, sin necesidad de que yo la/lo 'arrastre' por el camino que me sirvió a mí. Pero como no estamos en el mismo lugar ni físico ni temporal, no me queda otra alternativa que escribir lo que fui pensando.

El objetivo del Quarto es poner en una misma fila o columna

o en alguna de las dos diagonales, cuatro piezas que tengan alguna característica en común. ¿Cómo se representa esto?

Quiero poner un ejemplo. Si yo le dijera que ubiqué estas cuatro piezas en la segunda fila del tablero:

(0,0,1,0), (0,1,1,0), (1,0,1,0) y (1,1,1,1)

¿habré ganado la partida? (No lea lo que sigue inmediatamente, porque figura la respuesta: mire con cuidado las cuaternas y busque si tienen alguna característica común a las cuatro).

La respuesta es afirmativa. ¿Por qué? No hace falta recordar qué quería decir que hubiera un 1 o un 0 en ninguno de los cuatro lugares. Lo que sí importa es si hay un 1 (o un 0) en el mismo lugar de la cuaterna en las cuatro piezas. En este caso, fíjese que las cuatro tienen un 1 en el tercer lugar. Una vez más, ¿se da cuenta de que *no interesa* qué característica representaban? En este caso, el 1 en el tercer lugar indica que las cuatro piezas son *cuadradas*.

¿Cuándo termina una partida? Cuando al haber jugado las 16 piezas (o antes), en alguna de las filas o columnas o en alguna de las dos diagonales, hay cuatro piezas que tienen alguna *coordenada* (así se llama cada una de los diferentes 'posiciones' en cada cuaterna) con el mismo número, sea un 0 o un 1.

Le sugiero que practique usted (si es que le interesa el juego). Como se desprende de todo lo que expliqué hasta acá, y lo enfatizo una vez más, poco importa cuál categoría es o lo que significa el 0 o el 1: lo *único* que importa es que haya alguna línea (sea vertical, horizontal o diagonal) que contenga el mismo número en la misma coordenada. Si uno detecta que eso sucedió, habrá ganado la partida.

Ahora bien. Como escribí al principio, mi preocupación

era saber si quien diseñó el juego (el matemático suizo Blaise Müller) lo hizo sabiendo que ninguna posición (de todas las posibles) podía terminar *sin* un ganador. En mi pobre experiencia de la noche anterior, hubiera podido deducir que sí, que ninguna partida podía terminar 'empatada'. Sin embargo, estaba claro que el número de partidas que jugamos era muy pequeño como para extrapolar una conclusión tan tajante. Y efectivamente, si hubiera conjeturado que eso era cierto, habría cometido un error. Hay (muchísimas) formas de *que no gane ninguno de los dos*. Lo primero que hice entonces fue buscar *al menos una solución*, es decir, una partida 'empatada'. Y encontré esta.

Fíjese ahora en las siguientes cuaternas. ¿Cómo interpretarlas?

(0,0,0,0)	(0,1,1,1)	(1,1,1,0)	(1,1,0,0)
(1,0,1,1)	(0,1,0,1)	(0,1,1,0)	(0,0,0,1)
(0,0,1,0)	(1,0,1,0)	(1,0,0,1)	(0,1,0,0)
(1,1,1,1)	(1,0,0,0)	(1,1,0,1)	(0,0,1,1)

Cada cuaterna es *una* pieza. Está claro entonces cuáles son las cuatro filas, las cuatro columnas y las dos diagonales. Si mi objetivo es buscar que *no haya ningún* ganador, debería confirmar que en ninguna de las filas, columnas o diagonales, hay alguna coordenada (o posición dentro de la cuaterna) que tenga el mismo número.

Por ejemplo, en la primera fila, *seguro* que no hay ganador porque en la primera posición aparecen ceros y unos: (**0**,0,0,0) está en la primera fila y también (**1**,1,1,0). Luego, en la *primera posición no hay ni cuatro ceros ni cuatro unos*.

Lo mismo sucede con la segunda, ya que están (0,**0**,0,0) y (0,**1**,1,1); ni en la tercera, ya que están (0,0,**0**,0) y (1,1,**1**,0); ni en la cuarta posición tampoco, con (0,0,0,**0**) y (0,1,1,**1**).

¿Y en las columnas? Acá es más fácil de ver, me parece. Le propongo que lo haga usted. Solo para quedarme tranquilo de que me siguió hasta acá, quiero convencerme (junto a usted) de que en la diagonal que va de izquierda a derecha, y de arriba hacia abajo, no hay ninguna posición que tenga o bien cuatro ceros o cuatro unos.

En la primera posición (o coordenada), están (**0**,0,0,0) y (**1**,0,0,1)
En la segunda posición (o coordenada), están (0,**0**,0,0) y (0,**1**,0,1)
En la tercera posición (o coordenada), están (0,0,**0**,0) y (0,0,**1**,1)
En la cuarta posición (o coordenada), están (0,0,0,**0**) y (0,0,1,**1**)

Bien. Al llegar a este punto ya me había quedado más tranquilo. Había comprobado que *hay soluciones*. Es decir, se puede jugar al Quarto y que no haya ningún ganador.

Pero naturalmente comienzan a aparecer preguntas… muchas preguntas. ¿Quiere pensar alguna/s usted? ¿Qué se le ocurre que uno querría saber?

Le ofrezco las primeras que me fueron surgiendo a mí. Para comenzar, ¿hay *una* sola solución? ¿O habrá más?

En principio, es 'fácil' obtener 'otras' simplemente *rotando o girando* el tablero. Es decir, si uno *gira* el tablero 90 grados, *todas las filas se transforman ahora en columnas, las columnas son las nuevas filas y las diagonales siguen siendo diagonales* de la nueva configuración del tablero. La diferencia es que la diagonal que iba de (digamos) de izquierda a derecha, de arriba hacia abajo, ahora va de derecha a izquierda (también de arriba hacia abajo). Pero 'en esencia' esa rotación o giro provee una nueva solución. Y de la misma forma, puedo seguir rotando el tablero original, no solo 90 grados, sino 180 y 270 grados. Esto permite obtener *cuatro* soluciones diferentes.

Solo para 'fijar' las ideas, estas serían las tres soluciones que se obtienen rotando 90, 180 y 270 grados:

1) Solución rotando 90 grados:

(1,1,1,1)	(0,0,1,0)	(1,0,1,1)	(0,0,0,0)
(1,0,0,0)	(1,0,1,0)	(0,1,0,1)	(0,1,1,1)
(1,1,0,1)	(1,0,0,1)	(0,1,1,0)	(1,1,1,0)
(0,0,1,1)	(0,1,0,0)	(0,0,0,1)	(1,1,0,0)

2) Solución rotando 180 grados:

(0,0,1,1)	(1,1,0,1)	(1,0,0,0)	(1,1,1,1)
(0,1,0,0)	(1,0,0,1)	(1,0,1,0)	(0,0,1,0)
(0,0,0,1)	(0,1,1,0)	(0,1,0,1)	(1,0,1,1)
(1,1,0,0)	(1,1,1,0)	(0,1,1,1)	(0,0,0,0)

3) Solución rotando 270 grados (o 90 grados hacia la izquierda)

(1,1,0,0)	(0,0,0,1)	(0,1,0,0)	(0,0,1,1)
(1,1,1,0)	(0,1,1,0)	(1,0,0,1)	(1,1,0,1)
(0,1,1,1)	(0,1,0,1)	(1,0,1,0)	(1,0,0,0)
(0,0,0,0)	(1,0,1,1)	(0,0,1,0)	(1,1,1,1)

Por otro lado, uno podría poner un 'espejo' vertical parado arriba del tablero. Lo que se refleje, no se puede obtener por rotaciones como hicimos recién. Sin embargo, el tablero que se obtiene *espejando* la solución inicial, permite obtener *otra* solución:

(1,1,1,1)	(1,0,0,0)	(1,1,0,1)	(0,0,1,1)
(0,0,1,0)	(1,0,1,0)	(1,0,0,1)	(0,1,0,0)
(1,0,1,1)	(0,1,0,1)	(0,1,1,0)	(0,0,0,1)
(0,0,0,0)	(0,1,1,1)	(1,1,1,0)	(1,1,0,0)

Fíjese que esta solución no figura entre las que obtuve haciendo las rotaciones. Y esto sugiere entonces que uno puede (a partir de esta) volver a rotarla 90, 180 y 270 grados. Hágalo y verá que llega a más soluciones.

Por otro lado, en lugar de ponerlo arriba de la primera fila, podría colocar el espejo que usé para reflejar la primera solución 'al costado' derecho, abajo o a la izquierda. Esto permite obtener más soluciones y nuevamente, al rotar cada una de ellas 90, 180 y 270 grados, uno conseguiría muchas más configuraciones del tablero en donde no habría ningún ganador. No sé si son todas diferentes, pero ciertamente son todas soluciones. ¿Qué quiero decir cuando escribo que "no sé si son todas distintas"? Lo que pienso es que quizás, usando diferentes rotaciones y *espejando* de diferentes maneras, se puedan obtener soluciones a las que ya había llegado antes.

Y hay otras formas de obtener más soluciones que no involucran ni las rotaciones de las que hablé ni de poner espejos en diferentes lugares.

Creo que acá voy a detenerme, pero me gustaría ofrecerle algo más para pensar. Como usted habrá advertido, si uno elige *una* solución y la rota, la espeja, etc., en esencia uno obtiene las 'nuevas' soluciones a partir de la original. La pregunta que tiene sentido hacerse, y es una propiedad que se busca (y *usa*) mucho en matemática es la siguiente: ¿habrá alguna solución que *no* se pueda obtener de la original a través de rotaciones o poniendo espejos? Todas las que se obtienen así, podríamos decir que están *dentro de la órbita de una determinada solución*.

Si uno quisiera formular la pregunta usando esta terminología podría hacerlo así: ¿existen dos soluciones de manera tal que *no estén dentro de la misma órbita*?

Podría seguir escribiendo y escuchando sugerencias de parte

de varias personas a quienes les conté el problema. De hecho, el 10 de mayo del año 2019, en una charla que di en el aula magna del Pabellón 1 de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, entre los problemas que describí ese día, conté el del Quarto. Muchos me sugirieron ideas para encontrar soluciones. Uno de ellos fue Juli Garbulsky, el hijo de Gerry Garbulsky, uno de los betatesters de todos los libros de esta colección. Juli tiene (al menos tenía en ese momento) 20 años y me sugirió lo siguiente: "Adrián, si uno toma una solución y permuta la segunda con la tercera fila, y lo mismo hace con la segunda y tercera columna, obtiene soluciones que no estaban en la órbita de la solución original".

Le propongo que verifique usted esta afirmación.

Por otro lado, le pedí a Juli si tenía ganas de pensar en el problema un poco más *profundamente*. ¿Qué quiero decir con esto? Le propuse que tratara de contestar la siguiente pregunta: "De todos las posibles posiciones en las que puede terminar una partida de Quarto, ¿cuántas terminan en 'empate' y cuántas terminan con un 'ganador'?"

Si lográramos contestar esta pregunta, sabremos entonces cuán difícil es *empatar*. Después de varios días, y de múltiples correos electrónicos, Juli me envió el siguiente texto:

> Con mi amigo Matías Bergerman nos propusimos responder la siguiente pregunta: "De todos los tableros de Quarto que tienen las 16 fichas ubicadas (o sea, que no tienen lugares libres), ¿cuántos son un empate?".
>
> No nos salió pensándolo como un problema de combinatoria, o sea, no se nos ocurrió cómo contarlos[6]. Pensamos en hacer un pro-

---

6. Lo que quiere decir es que no se les ocurrió elaborar una 'estrategia' o un 'modelo' para poder determinar *cuántos tableros terminarían en una posición de 'empate'*.

grama en la compu para que revise todos los tableros posibles y los cuente… pero son un *montón*: 16! Para ser más explícitos, el número de posiciones posibles es: 16! = 20.922.789.888.000 (más de 20 *billones*). Este número es *enorme*, aun para una computadora.

Así que hicimos otro programa, más simple pero que nos daba una respuesta aproximada. Lo que hicimos fue generar *cien millones* de tableros (llenos) *al azar* (cien millones no es *nada* al lado de 20 billones) y contar cuántos de ellos son un empate.

La estadística da que aproximadamente el 2% de todos los tableros son un empate (y por lo tanto, el restante 98% tiene algún 'cuatro en línea'). A pesar de que esto, da una buena noción de por dónde anda el resultado *posta*, no es exacto, y nosotros estamos *manija* de tener el resultado exacto.

Así que nos aprovechamos de una de las simetrías que tiene el Quarto para hacer que la compu no tenga que pasar por *tooooooodos* los casos. La simetría que usamos es la siguiente: solo revisamos los tableros que en la esquina superior izquierda tienen (0,0,0,0)[7].

Otra idea que usamos para no tener que pasar por todos los tableros es la siguiente: ponele que estás llenando el tablero; empezás por la primera fila y cuando pusiste esas cuatro piezas ya se formó un 'cuatro en línea'. No hace falta que sigamos llenando el resto del tablero, porque —pase lo que pase— no va a dejar de haber un 'cuatro en línea'. Con esto hay un *montón* de tableros que nos ahorramos

7. Si usted leyó el texto hasta acá, *ya sabe* que si uno tiene un tablero con una posición determinada, puede hacer 'movimientos' con él de manera tal que por cuestiones de simetría *parezca* una nueva posición, pero en realidad es la misma. Esas 'simetrías' no alteran la condición de *empate* o *no*. Es decir: si *antes* de rotarlo tiene 'cuatro en línea' en alguna de las filas o columnas o diagonales, *después de rotarlo* sigue conservando esa propiedad. Y si había terminado en un empate, cualquier simetría o *movimiento permitido* no alterará esa condición. En consecuencia, uno *siempre* puede modificar el tablero de manera tal que la pieza ubicada 'arriba y a la izquierda' sea la pieza que lleva el 'nombre' (0,0,0,0).

> revisar. Acá es cuando sumamos a un amigo nuestro, Bruno Glecer, que la tiene clara con cómo hacer que la compu *corra más rápido un programa*. Todo esto fue suficiente para reducir el tiempo que le llevaría a la computadora, y por eso pudimos obtener el resultado en solo… *¡treinta horas!*
>
> Finalmente sabemos que la cantidad total de tableros con empate en el Quarto es 414.298.141.056.

Ahora sigo yo. Le propongo que piense un instante en este número: 414.298.141.056.

¡Son más de 414 *mil millones* de tableros! Una barbaridad.

Pero por otro lado, como el objetivo es calcular *qué proporción de todas las posibles posiciones en las que puede terminar una partida resulta un empate,* lo que tiene que hacer es dividir. ¿Dividir 'qué'?, se estará preguntando usted. Bueno, dividir 414 *mil millones* (por los empates) por 20 *billones* (que son los posibles). Y el resultado es:

414.298.141.056 / 20.922.789.888.000 = 0,01980129…

Moraleja: *el* ***total*** *de empates es un poco menos que el 2% de los tableros.*

¿No es increíble este resultado? ¿No es increíble lo que hicieron Juli, Matías y Bruno?

Intencionadamente, traté de respetar la terminología que usaron (compu, montón, manija, posta, etc.) porque así fue escrito por ellos. Es otra forma de *respetar el trabajo* que hicieron y mi gratitud por el esfuerzo y dedicación que pusieron. El entusiasmo con el que encararon la tarea bien merece nuestro (el suyo y el mío) reconocimiento.

“En mi vida”, una canción de los Beatles. ¿Quién la escribió?

La historia que sigue es verdaderamente fascinante. Se trata de usar la matemática de forma distinta. Suponga que, por alguna razón, es necesario conocer el autor de un determinado episodio, que podría ser —por ejemplo— quién es el padre (o la madre) de una criatura o quién fue el autor de un incidente delictivo. Históricamente se tenían las huellas dactilares. Después apareció la tecnología que permite usar el ADN y compararlo con el de una determinada base de datos. En la Argentina, esta tecnología ha sido esencial para detectar la identidad de personas que nacieron con sus madres en cautiverio y luego fueron ‘robadas’ y entregadas como quien compra una mercancía, en uno de los capítulos más crueles de la historia contemporánea de nuestro país. En ese sentido, utilizando una combinación de medicina, química, bioquímica, biología, genética, biogenética, computación, ingeniería, análisis de sistemas (por nombrar *algunos* de los ingredientes), la ciencia en general nos ha provisto de herramientas que son relativamente recientes y que han sido de una utilidad extrema.

Quiero incluir también episodios menos traumáticos o menos dolorosos, por ejemplo, encontrar al verdadero autor de un determinado texto o de una pintura. Pero en el caso al que me quiero

referir acá, hay una 'vuelta' que yo no había leído ni escuchado antes. Acompáñeme en esta historia y verá si la/lo sorprende a usted como me sorprendió a mí. De cualquier modo, sirve para mostrar un 'costado' de la matemática que no está necesariamente muy presente y ni siquiera es visible.

No importa cuán afecto sea usted a los Beatles; es imposible ignorar la huella que dejaron los integrantes del cuarteto de Liverpool, Inglaterra. Está claro que los Beatles escribieron muchísimas canciones y, aun corriendo el riesgo de equivocarme en la precisión del número, la literatura que consulté coincide en que las canciones que compusieron fueron en total 213. La enorme mayoría tiene dos autores: John Lennon y Paul McCartney.

Un dato que yo no conocía (quizás usted sí) es que cuando ambos eran adolescentes, hicieron una suerte de pacto. Frente a una canción que hubieran escrito en conjunto pero con diferente grado de participación de cada uno, decidieron que la firmarían los dos, como si sus intervenciones hubieran sido distribuidas por mitades. El acuerdo funcionaba así: salvo que uno de los dos la hubiera escrito sin *ninguna participación del otro*, aunque fuera un mínimo aporte, los dos aparecerían como coautores.

Con el paso del tiempo, cuando la fama y el prestigio los habían trascendido, cuando ya eran figuras mundiales, ya no tenía la misma importancia mantener en 'secreto' cuál había sido la magnitud del aporte de cada uno frente a las piezas que habían 'cofirmado'. De hecho, ambos fueron confesando con el tiempo, en memorias que escribieron por separado, quién escribió qué y en cuánto intervino el otro. Me quiero apurar a decir que yo no soy experto en ninguno de estos temas, y temo 'herir la sensibilidad' de alguna persona experta en la música de los Beatles; por lo tanto, quisiera disculparme de antemano si hay algún error en los datos que siguen. Usted verá que no tiene ninguna importancia:

a los efectos de la intervención de la matemática, será totalmente irrelevante. Para aquellos a quienes este tipo de información les resulta muy significativa, ahora ya sabemos —como escribí antes— cómo se distribuyeron las 'cargas' en cada canción. Pero ¿por qué escribo sobre este tema? Es que hay un dato 'que falta', o que hasta hace muy poco 'hacía ruido'.

Una canción en particular sigue (o seguía) generando una 'minicontroversia' a través del tiempo. La melodía a la que quiero hacer referencia es una balada "In My Life", que en español se traduciría como "En mi vida". En sus memorias, las versiones de ambos son contradictorias. Lo único que queda claro es que fue escrita en 1965, pero cada uno dice se atribuye el aporte mayoritario.

Por supuesto, como fueron tan prolíficos, como escribieron tanto en común y no siempre estaban en condiciones de 'sobriedad' para poder recordar qué tipo de participación individual tuvo cada uno —pero además como pasó *tanto tiempo*—, la dualidad quedó siempre planteada. Encima, uno de los 'potenciales' autores está muerto (Lennon). Entonces ¿cómo hacer para *develar el misterio*, como escribió el periodista científico Ned Wharton en agosto del año 2018?[8]

Y justamente aquí es donde aparece en escena la matemática. El 1° de agosto del año 2018, en uno de los simposios de estadística más importantes del mundo (JSM 2018[9]), que se hizo en Vancouver, Canadá, tres científicos, Mark Glickman, Jason

---

8. El texto del artículo completo se puede encontrar acá: https://www.npr.org/2018/08/11/637468053/a-songwriting-mystery-solved-math-proves-john-lennon-wrote-in-my-life

9. JSM son las iniciales del Joint Statistical Meeting (Encuentro Conjunto sobre Estadística).

Brown y Ryan Song, presentaron un trabajo que fue largamente celebrado por la comunidad de especialistas y que sirvió para determinar la autoría de esa canción[10]. Antes de avanzar, un dato que —creo— es muy interesante: uno de los autores, Jason Brown estuvo trabajando en el proyecto durante *¡más de diez años!* Me imagino que no solamente en este caso propiamente dicho, sino en la estrategia y tecnología que le permitiera dilucidar o determinar la autoría de una cierta canción.

La idea del método que utilizaron fue la siguiente. A mediados del siglo pasado, en la década de 1950, un grupo de estadísticos comenzaron a usar una técnica que se conoce con el nombre de ‘bolsa de palabras’[11]. Es la que se usa en la actualidad para poder ‘filtrar’ los correos electrónicos que se conocen con el nombre de *spam*. Nosotros los denominamos en castellano ‘mensajes no deseados’, o algo equivalente. Lo que se propusieron fue adaptar lo que se hacía (o hace) con los textos, extrapolándolo al caso de la música.

Fíjese cómo se procede con los textos escritos. Uno toma un fragmento suficientemente largo. Separa el texto en las palabras

---

10. Mark Glickman es especialista en estadística (profesor en Harvard) y reconocido pianista (de música clásica). Ryan Song también es profesor en Harvard, pero en la rama de ingeniería, mientras que Jason Brown es matemático, profesor en la Universidad de Dalhousie. El artículo presentado por Mark Glickman, Jason Brown y Ryan Song lleva el siguiente título: “Assessing Authorship of Beatles Song from Musical Content: Bayesian Classification Modeling from Bags-Of-Words Representation”, que en esencia sostiene que trataron de determinar la autoría de la *música* en una de las canciones de los Beatles. Si le interesa saber más detalles, el trabajo completo se puede encontrar acá: https://ww2.amstat.org/meetings/jsm/2018/onlineprogram/AbstractDetails.cfm?abstractid=329336

11. En español, bolsa de palabras.

que lo componen, sin importar ni la gramática ni el orden en el que esas mismas palabras aparecieron escritas. Sería algo así como separar el texto en todas las palabras que lo componen y meterlas a todas 'dentro de una bolsa' (de ahí el nombre 'bolsa de palabras').

Después, cuando ya tiene este conjunto de palabras, *contaron la frecuencia* con la que aparece cada una de ellas. Por ejemplo, usted debería tomar un texto que le interesa analizar. Fija una determinada longitud y lo separa en fragmentos del largo que usted prefijó. Luego corta cada segmento en una cierta cantidad de palabras y cuenta cuántas veces aparece cada una (me refiero a las palabras que están dentro de esa bolsa particular).

Una vez que repitió este procedimiento suficientes veces con un determinado autor, es muy probable que usted encuentre *patrones*, que son propios de esa persona. Si usted lo hizo muchas veces con diferentes textos, de alguna manera se está convirtiendo en una suerte de 'detective personal' o experto en ese autor particular.

A esa altura, bastaría con que le muestren un determinado texto y que se lo presentaran como anónimo, y usted estará en condiciones de decidir (con alta probabilidad de acertar) si fue escrito o no por el autor que estuvo estudiando.

Al llegar acá creo que intuye lo que habrá que hacer en el caso de una pieza musical. El problema es que ahora no están determinadas de antemano las 'unidades' a estudiar: *¡no hay palabras!* De todas formas, habrá que buscar algo equivalente, que fue justamente lo que hicieron Brown, Song y Glickman, repitiendo 'virtualmente' la misma idea con la que trataban los textos escritos.

En el caso de *textos musicales*, prefijaron una longitud y tomaron pequeños 'cortes' de una canción. Después hicieron lo

mismo que con las palabras pero en forma un poco más sofisticada. Como no podían contar con la ‘unidad palabra’ que —obviamente— hace todo mucho más uniforme, tuvieron que ‘inventarse’ otras categorías. Por ejemplo, buscando combinaciones de notas, ya sea tomándolas en forma individual, de a pares, en tercetos, cuartetos, etc.[12] Antes las palabras cabían todas dentro de una misma bolsa, porque no había distinciones. Ahora, al seleccionar combinaciones de diferentes tipos, los autores hicieron una división en cinco categorías. Naturalmente esta categorización es arbitraria: podrían haber tomado más (o menos) pero, de hecho, como lo hicieron con *todas* las canciones de la misma forma, terminaron eligiendo un sistema uniforme de medición. La diferencia residía en que ahora tenían *cinco bolsas* para analizar, cinco bolsas de *diferente tipo*. En el caso de las palabras, sería equivalente a buscar no solo palabras individuales, sino combinaciones de pares de palabras, tercetos, cuartetos, etc.

Una vez hecho esto, se propusieron determinar la ‘frecuencia’ con la que aparecen en un determinado contexto. Para lograrlo, tomaron setenta canciones que escribieron Lennon y McCartney POR SEPARADO y buscaron patrones que se repitieran y permitieran distinguir uno de otro.

Cuando ya tenían todo este ‘arsenal’ a disposición, tomaron la canción de referencia (“In My Life”) y la hicieron pasar por el ‘tamiz’ que habían preparado. Llegado a este punto, si bien no pueden afirmar *categóricamente* que la escribió uno u otro, los resultados que exhibieron son los siguientes (en términos probabilísticos):

12. Se llaman *unigramas*, *bigramas*, *trigramas*, *n-gramas*, para indicar el número de notas o cuerdas que intervienen.

a) La probabilidad de que el tipo de combinaciones que encontraron en cada bolsa los hubiera utilizado Paul McCartney fue de un 0,018 (o sea, 1,8 %). Esto se puede resumir diciendo: “La probabilidad de que hubiera sido McCartney es ‘casi’ nula”.
b) La probabilidad de que el tipo de combinaciones que encontraron en cada bolsa los hubiera utilizado John Lennon era de un 0,982 (o sea un 98,2%).

La moraleja es obvia (creo): la canción la escribió John Lennon.

No quiero terminar sin hacer una reflexión (como hizo el autor del texto original): es preferible confiar en la matemática que en lo que hubieran podido decir cualquiera de los dos (más allá de que Lennon esté muerto ahora).

Es más confiable *este* resultado que lo que ellos pudieran recordar después de cincuenta y cuatro años… ¿no está usted de acuerdo?[13]

13. Como no podía ser de otra forma, Carlos D’Andrea me hace una observación muy interesante: si uno tuviera que ‘apostar’ sobre quién escribió la canción, concluiría —como hice yo— que fue John Lennon, pero ¿quién dice que no fue Paul McCartney quien trajo la *idea* y Lennon quien escribió la música? ¿No habían decidido que, sin importar *cuán pequeña* fuera la cooperación, *ambos* habrían de quedarse con el crédito?

La bolsa con el millón de dólares de Alex Bellos

Uno de los diarios más prestigiosos de Europa es el inglés *The Guardian*. Como sucede con casi todos los grandes matutinos del mundo, *The Guardian* tiene un columnista que refleja lo que sucede en el mundo de la matemática, muy especialmente con lo que se llama 'matemática recreativa'. En este caso me refiero a Alex Bellos.

Bellos nació en Oxford, sus padres son húngaros, tiene 49 años y lo curioso es que fue corresponsal especial del diario durante cinco años en Brasil, más precisamente en Río de Janeiro. Enamorado del fútbol, escribió un par de libros que tuvieron marcado éxito en el Reino Unido: el primero fue una biografía de Pelé (como coautor) y el otro se 'autoexplica' con el título: *Futebol: The Brazilian Way of Life*.

Por supuesto, las menciones a su pasión por el fútbol en general y por Brasil en particular no son las razones por las que quiero mencionarlo. Bellos escribe cada dos semanas un problema sobre matemática recreativa que es seguido por millones de lectores, trabaja además en la BBC y da charlas y conferencias recorriendo toda Europa. Y aquí es donde me quiero detener y contar una de sus historias. Es una 'versión libre' de la que presentó él en *The Guardian* hace un par de meses, pero,

en esencia, contiene la misma idea. El crédito entonces es *todo* para él.

Alex propuso este problema, que yo voy a llamar "La bolsa con el millón de dólares".

Suponga que entramos juntos en un enorme salón de un hotel céntrico (sin importar a qué *centro* me refiero. Usted puede ajustarlo a su gusto). Avanzamos hacia un gran ventanal y aparecen cinco cofres. Están bien adornados y lucen muy nuevos. Cada uno de ellos tiene un número, del *uno* al *cinco*. Lo que *no es irrelevante*, ya que dentro de uno de ellos hay una bolsa que contiene un millón de dólares… en efectivo. Yo lo acompaño, pero solo para introducirlo al 'juego'. A partir de ahora, su objetivo es tratar de encontrar el dinero. Créame que no es imposible (ni mucho menos), pero para jugar es necesario que se cumplan ciertas reglas.

Usted es el *único* participante. El día que empiece la búsqueda, la bolsa con el dinero ya estará dentro de uno de los cinco cofres. Se trata entonces de cumplir estas reglas y puede que, entonces, el dinero sea suyo.

Reglas

1) Usted *solamente* puede abrir un cofre por día. Si abre un cofre cualquiera y encuentra el dinero, se termina la búsqueda.
2) Si usted abre un cofre y está vacío, tiene que esperar hasta el próximo día para abrir otro (o incluso el mismo), pero la regla indica que solamente puede abrir uno cada 24 horas.
3) Eso sí: al día siguiente, usted tiene libertad para elegir qué cofre abrir, incluso cualquiera de los que abrió antes, no importa. Es como si el juego comenzara nuevamente.
4) Esto es muy importante: *el dinero no puede estar en el mis-*

mo cofre más de un día. La bolsa tiene que cambiar de cofre todos los días[14]. Sin embargo, no puede ir a un cofre cualquiera, sino que todos los días cambia de un cofre a otro que sea *adyacente*. Por adyacente entiendo que está a la derecha o a la izquierda del cofre que contenía el dinero el día anterior. Por ejemplo, si un día está en el cofre *tres*, al día siguiente tiene que estar en el *cuatro* o en el *dos*. Para dejar claras las ideas, si un día estuviera en el cofre número *cinco*, al día siguiente la bolsa con el dinero deberá estar en el cofre que lleva el número *cuatro inexorablemente*. Lo importante es establecer que el dinero *nunca está quieto* y cambia de cofre *todos los días*.

Llegado a este punto, lo que usted tiene que hacer es diseñar una estrategia que permita ‘acorralar’ la bolsa y quedarse con el dinero.

Pregunta: ¿cuántos días necesita —como máximo— para ‘asegurarse’ que va a encontrar la bolsa?

Ahora sí, le toca a usted. Con todo, antes de retirarme, permítame hacerle la misma sugerencia que Alex (Bellos) les hizo a sus lectores: empiece con *menos* cofres, con tres por ejemplo, y fíjese si es capaz de elaborar un plan en ese caso.

Y a partir de acá, y ya por deformación profesional, fíjese no solo si puede resolver el caso en el que haya cinco cofres, intente ver si su estrategia se puede extrapolar a *cualquier número de cofres* (siempre manteniendo las mismas reglas) y cómo se modifica el *número máximo de días* para garantizar que va a encontrar el dinero. Mientras tanto, yo espero tranquilo a continuación.

---

14. Esto explica por qué usted podría *querer* abrir el mismo cofre que abrió antes.

Una estrategia posible

Para empezar, y como escribí antes, le propongo reducir el número de cofres. En lugar de *cinco*, imagine que hay nada más que *tres*. Si prefiere, no siga leyendo porque voy a escribir una idea que terminará 'divulgando' una parte de la solución. Todavía está a tiempo para seguir por su lado. Y algo más: decididamente *no es la única estrategia posible*. Es solo *una*. Ahora sí, acá voy:

Supongamos que hay *tres* cofres, que voy a numerar 1, 2 y 3. Voy a intentar convencerla/o de que con solo dos intentos voy a encontrar el dinero. Venga conmigo.

La bolsa puede estar en cualquiera de los tres cofres. Yo empiezo abriendo el cofre número 2. ¿Qué puede pasar? Dos posibilidades:

a) Si lo encontré, listo: se terminó el problema.
b) Si no lo encontré, es porque el dinero tiene que estar (forzosamente) en el cofre 1 o en el cofre 3.

El segundo día (y final), yo vuelvo a abrir el cofre 2. ¿Quiere pensar usted por qué SEGURO que encuentro el dinero?

Como el primer día *no estaba* en el cofre 2 (si no, ya lo habría encontrado), la bolsa no tiene otra alternativa que estar en el 1 o el 3. Como el dinero está 'forzado' a cambiar de cofre *todos los días*, y solamente puede estar en el 1 o el 3, y además las reglas obligan a que vaya a uno adyacente, *el segundo día tendrá que estar inexorablemente en el cofre* 2. Como yo voy a abrir ese cofre, seguro que lo encuentro… ¡y una vez más, se terminó el problema!

Antes de avanzar, quiero hacer una grilla o cuadrícula en donde pueda testimoniar todo el proceso que fui relatando. Fíjese si está de acuerdo.

	Cofre 1	**Cofre 2**	**Cofre 3**
Día 1	Dinero	Dinero **(X)**	Dinero
Día 2		Dinero **(X)**	

El primer día, el dinero puede estar en cualquiera de los tres cofres (y eso lo indiqué escribiendo la palabra 'dinero' en los tres casilleros). Escribí una letra X para indicar que en los días 1 y 2 abrí *ese* cofre. Fíjese que en el segundo día (o sea, en la segunda fila), la palabra dinero *solamente* aparece en el cofre 2. ¿Por qué? No puede estar ni en el cofre 1 ni en el 3, porque para 'aparecer' allí, el día anterior tendría que haber estado en el cofre 2. Y como abría ese cofre el día 1 y no había nada, esto implica que el dinero *no puede estar (en el día 2) ni en el cofre 1 ni en el* 3… ¡Por eso puedo garantizar que en dos días… encuentro el dinero!

Ahora, aumentemos en *uno* el número de cofres. Supongamos que ahora hay *cuatro* cofres. Lo que voy a hacer entonces es usar el *mismo tipo de argumentos* que utilicé recién, pero con la diferencia de que ahora hay un cofre más. Quiero ver si puedo encontrar el dinero (acorralando a la bolsa) y ver cuántos días más necesito. Es decir, la pregunta que me/le estoy haciendo es la siguiente: "Si hubiera cuatro cofres, ¿servirá la estrategia que usé cuando había uno menos?".

Supongamos entonces que hay ahora *cuatro* cofres. Hago la misma grilla que antes y, como aparece un cofre más, me permito agregar un par de días (días 3 y 4, que aún no sé si voy a utilizar, o peor aún, no sé si me van a alcanzar).

Voy a escribir una tabla de 4 × 4, y paso a explicarme por qué lo hago.

	Cofre 1	Cofre 2	Cofre 3	Cofre 4
Día 1	Dinero	Dinero **(X)**	Dinero	Dinero
Día 2				
Día 3				
Día 4				

Como hice antes, cada columna se corresponde con uno de los cuatro cofres. A su vez, cada fila se corresponde con un día diferente.

Arranco así. El primer día, el dinero puede estar en *cualquiera* de los cuatro cofres. Es por eso que, igual que hice con los tres cofres, escribí la palabra 'dinero' en las cuatro columnas.

A su vez, yo empiezo abriendo el cofre número 2 (y por eso, puse una cruz). Si encuentro el dinero en ese momento, se termina el problema.

Supongamos que el dinero *no* está ahí. Tengo que pasar al día 2. Ahora bien, en el día 2 el cofre 1 *tiene que estar vacío*. ¿Por qué? Es que si hubiera estado en el cofre 1 el primer día, en el segundo tiene que ir al cofre 2 y por lo tanto, dejar vacío el primero.

Y nada más (pero nada menos). Fíjese cómo queda la grilla ahora y le anticipo que uso una vez más una letra X o una cruz para indicar que *voy a abrir el cofre* 3. Queda así:

	Cofre 1	Cofre 2	Cofre 3	Cofre 4
Día 1	Dinero	Dinero **(X)**	Dinero	Dinero
Día 2		Dinero	Dinero **(X)**	Dinero
Día 3				
Día 4				

Una vez más, si cuando abro el cofre 3 encuentro el dinero… ¡listo!, se termina el problema.

Si lo encuentro vacío, paso al día 3 y voy a VOLVER a abrir el cofre 3 (de ahí que use la cruz o la letra X), pero me gustaría sugerirle que, antes de ver cómo completé la grilla, se fije qué conclusiones sacaría usted para el tercer día. Si cuando uno abre el cofre 3 se encuentra con que el dinero *no estaba allí*, ¿qué debería suceder el día 3 con el dinero y los cofres?

	Cofre 1	**Cofre 2**	**Cofre 3**	**Cofre 4**
Día 1	Dinero	Dinero **(X)**	Dinero	Dinero
Día 2		Dinero	Dinero **(X)**	Dinero
Día 3	Dinero		Dinero **(X)**	
Día 4				

Avancemos juntos hilvanando esta serie de razonamientos.

¿Por qué queda así la grilla? Si usted revisa lo que escribí en los párrafos anteriores, comprobará que el tercer día, el dinero no puede estar en el cofre 2, porque si no, debió haber estado en el cofre 1 el día 2 (y no estaba), o debió haber estado en el cofre 3 el día 2, ¡y tampoco estaba!

Luego el día 3, el dinero *no puede estar en el segundo cofre*.

Pero claro, aparece una *novedad*: el dinero *sí* puede estar en el cofre 1. ¿Por qué? Es que el dinero pudo haber estado en el cofre 2 el segundo día y por lo tanto, *haberse movido* al cofre 1 el día siguiente. Yo no lo encontré ese segundo día, porque en esa oportunidad yo abrí el cofre 3 y ¡me lo perdí!

Ahora bien, algo importante: *¡no puede estar en el cofre 4 el tercer día!* ¿Por qué? ¿Quiere pensar usted? Si el tercer día estuviera en el cofre 4, eso dice que el día anterior (el día 2) ¡tuvo que

haber estado en el cofre 3! Y nosotros sabemos que eso no es así porque yo abrí ese cofre y estaba vacío.

Si usted me siguió con este encadenamiento de ideas, concluirá conmigo que hemos terminado de analizar las posibilidades del tercer día.

Justamente al llegar acá, quiero preguntarle: ¿Qué haría usted el *cuarto día*?

Fíjese que el dinero ¡solamente puede estar en el primer cofre el tercer día[15]! Luego, ¡no le queda otro camino que aparecer en el cofre 2 el cuarto día! Y eso es lo que hago/hacemos: el último día (el cuarto), abro el cofre 2 e inexorablemente… ¡¡¡sé que me voy a encontrar con el millón de dólares!!! Listo. Lo atrapé. Lo forcé a que tuviera que estar en el segundo cofre (en el último día).

	Cofre 1	**Cofre 2**	**Cofre 3**	**Cofre 4**
Día 1	Dinero	Dinero **(X)**	Dinero	Dinero
Día 2		Dinero	Dinero **(X)**	Dinero
Día 3	Dinero		Dinero **(X)**	
Día 4		Dinero **(X)** **(final)**		

Ahora llega el momento de intentar resolver el caso original, el de los *cinco* cofres. Como antes, la pregunta es: ¿cuántos días necesita usted para poder encontrar el dinero? Para tres cofres, fueron suficientes dos días. Para cuatro cofres, fueron necesarios cuatro días. ¿Y para *cinco* cofres? Acá empiezo a elaborar la estrategia… *junto con usted*. Acompáñeme.

15. Para ser *rigurosos*, el texto debería decir: “Al final del tercer día, cuando ya abrí el cofre por tercera vez y no encontré nada…”.

	Cofre 1	Cofre 2	Cofre 3	Cofre 4	Cofre 5
Día 1	Dinero	Dinero **(X)**	Dinero	Dinero	Dinero
Día 2					
Día 3					
Día 4					
Día 5					
Día 6					

Tal como hice en el caso de cuatro cofres, comienzo abriendo el cofre 2. Por eso escribí la letra X (porque supongo que lo abrí y *no encontré el dinero*. Si no, el problema se termina ahí). Eso sí, como esto sucede recién el *primer día*, está claro que la bolsa con el millón de dólares está (o puede estar) en cualquiera de los cinco cofres, por eso que llené la grilla poniendo la palabra 'dinero' en todos los cofres.

Creo que ahora puedo avanzar un poco más rápido. Como antes, en el segundo día voy a abrir el cofre 3. ¿Cómo completaría la grilla usted para el segundo día? ¿Qué datos del primer día me/nos van a permitir dejar algunos cofres vacíos? Sigamos…

	Cofre 1	Cofre 2	Cofre 3	Cofre 4	Cofre 5
Día 1	Dinero	Dinero **(X)**	Dinero	Dinero	Dinero
Día 2		Dinero	Dinero **(X)**	Dinero	Dinero
Día 3					
Día 4					
Día 5					
Día 6					

El segundo día queda claro que el cofre 1 tiene que estar vacío (y ya sabemos por qué mirando lo que sucedió en los ca-

sos anteriores). Ahora, siguiente paso. Voy a abrir el cofre 4. Le propongo que usted (sí, a usted) completar la grilla el día 3. Mientras tanto, sigo. La voy a ir llenando *día por día*, dejando 'en blanco' (en cada día) los cofres que *tienen* que estar vacíos.

Empiezo con el día 3. Por ejemplo, el cofre 2 tiene que estar vacío, porque para que el dinero pudiera estar allí, la bolsa tendría que haber estado (en el día 2) en el cofre 1 o en el 3 y, como vimos antes, eso no sucedió.

	Cofre 1	**Cofre 2**	**Cofre 3**	**Cofre 4**	**Cofre 5**
Día 1	Dinero	Dinero **(X)**	Dinero	Dinero	Dinero
Día 2		Dinero	Dinero **(X)**	Dinero	Dinero
Día 3	Dinero		Dinero	Dinero **(X)**	Dinero
Día 4					
Día 5					
Día 6					

Una observación más. Quiero anticiparle cuál va a ser mi estrategia para todo lo que sigue (suponiendo que no lo encuentro en el proceso). Estos son los números de cofres que voy abriendo día por día:

2, 3, 4, 4, 3, 2

Si usted mira esta 'tira' de seis números, cada uno indica el número de cofre y el lugar en la 'tira' indica a qué día corresponde. En total, la estrategia concluye en *seis* días.

Vamos al día 4.

	Cofre 1	Cofre 2	Cofre 3	Cofre 4	Cofre 5
Día 1	Dinero	Dinero **(X)**	Dinero	Dinero	Dinero
Día 2		Dinero	Dinero **(X)**	Dinero	Dinero
Día 3	Dinero		Dinero	Dinero **(X)**	Dinero
Día 4		Dinero		Dinero **(X)**	
Día 5					
Día 6					

Como antes, los espacios vacíos significan cofres vacíos. Día 5:

	Cofre 1	Cofre 2	Cofre 3	Cofre 4	Cofre 5
Día 1	Dinero	Dinero **(X)**	Dinero	Dinero	Dinero
Día 2		Dinero	Dinero **(X)**	Dinero	Dinero
Día 3	Dinero		Dinero	Dinero **(X)**	Dinero
Día 4		Dinero		Dinero **(X)**	
Día 5	Dinero		Dinero **(X)**		
Día 6					

Y este es el final. El día 6, voy a abrir el cofre 2. Fíjese que el dinero *debe* estar allí porque, después del día 5, si no lo encontré en el cofre 3, quiere decir que *todos los cofres* (2, 3, 4 y 5) ***están vacíos***. El único que tiene el dinero es el cofre 1. Cuando llego al día 6, *forzosamente* encuentro el dinero en el cofre 2, y allí termina la estrategia.

	Cofre 1	Cofre 2	Cofre 3	Cofre 4	Cofre 5
Día 1	Dinero	Dinero **(X)**	Dinero	Dinero	Dinero
Día 2		Dinero	Dinero **(X)**	Dinero	Dinero
Día 3	Dinero		Dinero	Dinero **(X)**	Dinero
Día 4		Dinero		Dinero **(X)**	
Día 5	Dinero		Dinero **(X)**		
Día 6		Dinero **(X)** **(final)**			

Por supuesto, esto termina de resolver el problema en el caso de que hubiera únicamente cinco cofres. Como usted habrá visto, la estrategia consiste en empezar con los cofres de esta forma: 2, 3, 4, 4, 3, 2 (y encuentro el dinero).

El número de días necesarios (como máximo) para encontrar el dinero es *seis*. Naturalmente, no se le escapa que ahora llega lo mejor: ¿qué pasa si tengo seis cofres?, ¿siete cofres?, ¿*n* cofres? ¿Cuál es la estrategia y cuál es el máximo número de días que necesito para encontrar el dinero?

Respuesta(s)

No se le escapará que yo podría seguir haciendo este mismo tipo de argumentos una y otra vez, pero creo que mejor sería que lo intentara usted. Lo que voy a hacer es 'escribir' la grilla final en el caso de *siete* cofres y a continuación la fórmula general cuando uno tiene *n* cofres y se tropieza con las mismas reglas. Acá voy.

	Cofre 1	**Cofre 2**	**Cofre 3**	**Cofre 4**	**Cofre 5**	**Cofre 6**	**Cofre 7**
Día 1	Dinero	Dinero **(X)**	Dinero	Dinero	Dinero	Dinero	Dinero
Día 2		Dinero	Dinero **(X)**	Dinero	Dinero	Dinero	Dinero
Día 3	Dinero		Dinero	Dinero **(X)**	Dinero	Dinero	Dinero
Día 4		Dinero			Dinero **(X)**	Dinero	Dinero
Día 5	Dinero		Dinero		Dinero	Dinero **(X)**	Dinero
Día 6		Dinero		Dinero		Dinero **(X)**	
Día 7	Dinero		Dinero		Dinero **(X)**		
Día 8		Dinero		Dinero **(X)**			
Día 9	Dinero		Dinero **(X)**				
Día 10		Dinero **(X)** **(final)**					

Varias observaciones

a) La estrategia consiste entonces en empezar en el cofre 2, y después seguir hasta llegar al *penúltimo* (en este caso, el cofre 6), pero si hubiera *n* cofres, seguiría hasta el cofre (n – 1). Allí *repetiría* ese cofre (el 6 o (n – 1)) y después

empiezo en orden descendente hasta llegar el cofre 2. En el momento que llego a él, *¡tengo que encontrarme con el dinero!*

b) Si usted mira el número de días que fui necesitando de acuerdo con el número de cofres, verá que:

3 cofres	2 días
4 cofres	4 días
5 cofres	6 días
7 cofres	10 días

¿Le sugiere *algo* este recorrido?

c) Me permito entonces sugerirle una fórmula general, para que deduzca usted:

$$[(n - 2) \times 2] \text{ días}$$

en donde 'n' indica el número de cofres.

d) La estrategia entonces es la que se ve en la siguiente 'tira', en donde aparece el número de cofre que voy abriendo a medida que van pasando los días:

$$2, 3, 4, 5, 6, \ldots, (n - 1), (n - 1), (n - 2), (n - 3), \ldots 4, 3 \text{ y } 2.$$

e) Me interesa ahora sugerirle que miremos un poco la estrategia tratando de entender cómo funciona. Supongamos que usted es quien elige el lugar en donde irá el dinero. Si observa lo que escribí antes, es decir, si usted supiera de *antemano* qué estrategia voy a usar, lo que le conviene para prolongar el momento en el que yo encuentre la bolsa con

el dinero, es ponerla de entrada en el cofre 1. Yo voy a elegir el 2 y a partir de allí empiezo un ‘periplo’ hacia el cofre 6. A usted entonces lo que le conviene es fluctuar entre los cofres 1 y 2. Al final, yo lo voy a ‘atrapar’, pero eso sucederá recién el día 10 cuando encuentre el dinero en el cofre 2. Mientras tanto, usted irá de 1 a 2, de vuelta a 1 y al 2 y así siguiendo durante los diez días, por lo que *inexorablemente* yo voy a encontrar el dinero.

f) Por último, fíjese que como yo abro primero el cofre 2 y después (si no encuentro el dinero) empiezo a ‘moverme’ hacia la derecha, si usted eligió algún cofre mayor que 2 (el 3, 4, 5, 6 o 7), yo lo voy a ir empujando hacia el cofre 7. Cuando usted no pueda más, como no me puede ‘saltear’ o ‘saltar’, inexorablemente tendrá que ‘caer’ en mi red. Es decir, mi estrategia se basa en dos fases importantes. La primera: si usted eligió cualquier cofre con número mayor que 2, yo lo empujo hacia el borde. Y en algún momento usted ‘chocará’ contra el cofre 7 (al que yo nunca voy a llegar), pero inexorablemente lo voy a encontrar. La segunda fase: como escribí antes, usted no me puede ‘pasar por arriba’ y, por lo tanto, *también* lo voy a encontrar en el cofre 2. Estos dos factores son determinantes para garantizar que el dinero tendrá que ‘ceder’.

Para finalizar, le sugiero que elija alguna persona para ‘jugar’. Dígale que elija en qué cofre pondría el dinero y ‘apuéstele’ que usted lo va a encontrar. Más aún: puede apostar cuál es el número *máximo* de movidas que usted necesitará para ‘atrapar el dinero’. Las caras de sorpresa que conseguí yo son impagables. Mucha suerte.

Apéndice

El 7 de marzo de 2018, Carlos D'Andrea me escribió este mail, que sirve para mostrar por qué 2(n – 2) es la mínima cantidad de cajas que hay que abrir. La demostración la hizo José Ignacio Burgos. Hay una *ligerísima* adaptación del problema original que propuso Alex Bellos, pero en esencia es *exactamente* la misma situación. Acá va[16].

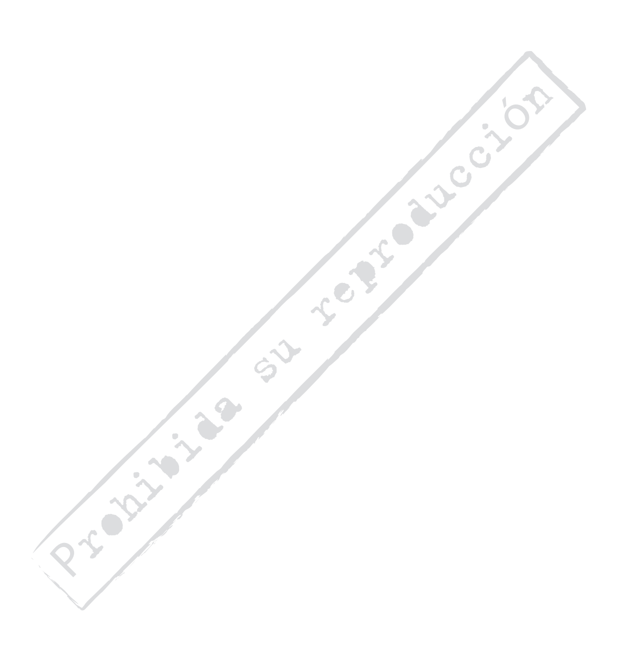
Hola Adrián,
Como siempre ocurre, hay alguien en "mi team" que trivializa todas las cosas. Aquí va la solución en 5 líneas de por qué 2(n – 2) es la mínima cantidad de cajas por abrir hecha por José Ignacio Burgos.
Un gran abrazo,
Carlos

Una variante de la demostración es la siguiente:
Todas las cajas entre la 2 y la (n – 1) deben abrirse al menos dos veces.

---

16. Hay un grupo de matemáticos en Barcelona, amigos entre ellos y muchos amigos míos también. Entre ellos está mi querido Carlos D'Andrea, y también Juan Carlos Naranjo, su hijo Pol, Joaquim (Quim) Ortega, José Ignacio Burgos, Martín Sombra… y varios más que fueron apareciendo por sus diferentes aportes no solo a este libro sino a todos los anteriores. Justamente fueron ellos quienes me sugirieron que agregara el origen del problema. En principio, yo creí que se le había ocurrido a otro amigo, el matemático británico Alex Bellos y él lo había publicado en *The Guardian* en este artículo del 3 de julio de 2017: https://www.theguardian.com/science/2017/jul/03/can-you-solve-it-are-you-smarter-than-a-cat. Pero en el *New York Times*, tres años antes, había aparecido otra versión (https://wordplay.blogs.nytimes.com/2014/01/27/princess/?_r=1), cuyo origen remite a David Penney. Y acá paro. Si hay alguna otra persona que publicó alguna referencia previa a las que menciono, que dé un paso al frente y acepte mi/nuestro error.

Una par y una impar. Supongamos que la caja i solo se abre las pasadas impares, entonces el ratón puede alternar entre las cajas $i - 1$, i, $i + 1$ estando en la caja i todas las pasadas pares, en la caja $i - 1$ las veces impares que se abra la caja $i + 1$ y en la caja $i + 1$ las restantes. Por tanto necesitamos $2(n - 2)$ aperturas como mínimo.
José



El elefante, las bananas y el puente

El problema que sigue es sencillamente ESPECTACULAR. Es muy fácil de plantear, muy interesante para pensar, muy ilustrativo para elaborar estrategias (que como no me canso de escribir, también significa *hacer matemáticas*)… En definitiva, contiene 'casi' todos los ingredientes a los que uno puede aspirar en temas de matemática recreativa.

Si habitualmente le pido que no lea la solución, en este caso estoy tentado de decirle que si lo hace, se habrá privado de disfrutar de pensar en 'algo' como pocas veces le ha pasado en su vida. Créame: encontrar *con precisión* la respuesta resulta poco relevante. En cambio, el *camino* que hay que recorrer… ¡no! Acá voy.

Un poco de historia

El 14 de octubre del año 2015, recibí un correo electrónico de Carlos D'Andrea. A esta altura, cualquier persona que ha seguido lo que escribí a lo largo de —muchísimos— años sabe quién es. De todas formas, Carlos es uno de los matemáticos argentinos más prestigiosos (en su especialidad) del mundo, ahora vive en España, es profesor en la Universidad de Barcelona. Siempre es

un gusto recibir 'algo' de él, porque inexorablemente aparece algún condimento inesperado, algún problema inesperado, algún pensamiento inesperado o inédito, y siempre con una sonrisa. La vida *fluye* naturalmente cuando Carlos está involucrado. En el caso que voy a contar, verá que no me equivoco.

Como decía, el correo llegó a mi casilla y ni bien lo abrí Carlos me contaba un problema, que no solo lo involucraba a él, sino también a dos matemáticos españoles (padre e hijo): Juan Carlos Naranjo (el padre) y Pol Naranjo (el hijo). A continuación, aparece un planteo que me pareció fascinante (el crédito es *todo* para ellos).

Un elefante tiene que atravesar un puente de 1.000 metros. Tiene 3.000 bananas al lado suyo y quiere llevar la mayor cantidad posible de bananas del otro lado del puente. Las condiciones son:

a) No puede cargar más de 1.000 bananas en ningún momento.
b) Por cada metro que camina, se ha de comer una banana 'como combustible'.

¿Cuál es la mayor cantidad de bananas que puede hacer cruzar el puente?

Y agregó: "Espero que te divierta. Un abrazo. Carlos". Lo primero que yo le contesté fue:

Hay algo que debo estar entendiendo mal porque si el elefante tiene que consumir una banana por metro para poder caminar, y no puede llevar más de 1.000 bananas por vez, supongamos que las quisiera llevar a todas, las 3.000… tendría que hacer tres viajes de 1.000 metros cada uno, y consumiría 1.000 bananas por cada viaje. Luego, no llega al otro lado con ninguna banana. Hay algo que no entiendo… ¡vos dirás!

Acá fue donde Carlos me dijo:

Estás entendiendo bien el problema, pero solo te falta un detalle y es determinar qué es lo que puede hacer el elefante en estas condiciones. Por ejemplo, podría comenzar a caminar cargando 1.000 bananas; detenerse a los 200 metros (ahí estaría cargando 800 bananas), dejar 600 allí y volverse al punto de partida (consumiendo otras 200 bananas). Luego, volver a cargar otras 1.000 bananas desde el punto de partida, hacer otra vez 200 metros (consumiendo 200 de las 1.000 que lleva en este segundo viaje), dejar 600 en el mismo lugar que antes (ahora allí quedaron 1.200) y consumir 200 más para volver al punto inicial. En este lugar quedan aún 1.000 bananas, y podría repetir el procedimiento, pero con la diferencia que ahora, al llegar a los 200 metros (en donde había 1.200 bananas), como no necesita volver (porque no quedan más bananas), en este lugar (200 metros de la partida), tiene ahora 2.000 bananas: las 1.200 que había dejado, más las 800 que le quedaron después del tercer viaje.
Como verás, si cargaba las 1.000 de entrada y pretendía llegar sin detenerse y sin dejar bananas en ninguna parte, evidentemente, llega **sin bananas** del otro lado. En consecuencia, el elefante tendrá que hacer varios viajes. El problema es tratar de encontrar cuál es el número máximo de bananas que puede transportar haciendo para ello, el mínimo número de viajes. En todo caso, la pregunta que cabe aún es: ¿habrá alguna estrategia posible que le permita llegar con 'algunas bananas' del otro lado?
La respuesta es que sí.

Y aquí finalizó con una frase que suelo escribir yo: "Ahora, te dejo a vos". ¿Usted qué piensa? ¿Qué se podrá hacer?

Para pensar

Voy a empezar con algunos ejemplos. A mí me resultaron muy 'sugerentes'. Me invitaron a pensar en una dirección que terminaría siendo la adecuada. De todas formas, le propongo que los lea *solamente* si se ha tropezado usted con alguna dificultad al pensarlo, porque si no, servirán para resolverle un problema que usted no tenía, como nos sucedía en el colegio o en la escuela, en donde nos contestaban preguntas que nosotros no nos habíamos hecho. Debe haber pocas cosas más aburridas que eso. Por lo tanto, le propongo que *disfrute* de pensar, ya sea *este* problema en particular o cualquier otro. El atractivo *está en el camino*. La solución es una 'posible' consecuencia, pero no la única. Más interesante es permitirse pasar buenos momentos, y esos están *ciertamente garantizados* al recorrer el trayecto, sirva (o no) para llegar a la estación final.

Sígame por este camino. Acá van algunos ejemplos.

1) Si el elefante lleva 1.000 bananas y camina todo el puente, cuando llega del otro lado no tiene bananas para dejar (se las comió todas para poder cruzar a la otra orilla) y encima se quedó sin combustible (bananas) para poder ir a buscar las otras 2.000. Evidentemente, esta estrategia *no funciona*. Voy a tener que elegir otra.

2) El elefante camina nada más que 100 metros con las 1.000 bananas. Cuando llega, no las puede dejar todas allí porque si no, él no se puede mover. Si quiere volver a buscar más bananas, necesita (por lo menos) cargar con 100. En consecuencia, lo *máximo* que puede dejar a los 100 metros son ¡800 bananas! Ahora sí, con las 100 que le sobraron, vuelve al lugar de origen.

Carga otras 1.000 bananas. Cuando llega a los 100 metros, otra vez se detiene a pensar. Él todavía tiene una carga de 900 bananas, pero había dejado 800 en el lugar. Podría avanzar sin tener que recoger ninguna de las 800 bananas, pero en ese caso, estará obligado a dejar menos en el segundo lugar en el que decida parar. Por lo tanto, *sube* 100 bananas más (y llega al tope de las 1.000 que puede cargar), dejando 700 a los 100 metros. Evidentemente, con las 1.000 que tiene ahora, puede llegar a cruzar el puente completamente, y como le faltan recorrer 900 metros, no solo podría llegar, sino que aún tendría 100 bananas para dejar del otro lado.

Si quisiera, podría terminar su tarea allí, pero hay *algo* que no parece estar bien con esta estrategia. ¿No habrá alguna manera de detenerse en *otro* lugar *antes* de llegar al otro lado del puente para volver hacia atrás y no abandonar directamente las 1.700 bananas que le quedaron sin trasladar? (Son 1.700 porque hay 700 a los 100 metros y 1.000 en la orilla desde donde salió). ¿No habrá alguna estrategia mejor?

Algunas reflexiones menores

a) Está claro que si el elefante quiere tener 'chance' de trasladar en algún momento *todas* las bananas, deberá hacer por lo menos tres viajes. Si contamos el viaje inicial, en donde carga la primera tanda de 1.000 bananas, como todavía le quedan 2.000 allí, necesitará volver —por lo menos— dos veces más.
b) Si en el primer viaje se detiene en cualquier lugar *después* de la mitad del puente (o incluso a los 500 metros), ya no tendrá forma de volver para trasladar las otras

2.000 bananas. En el *mejor* de los casos, si hace 500 metros antes de parar la primera vez, ya consumió 500 de las bananas que lleva y, como tendría que retroceder esos mismos 500 metros, consumiría todo lo que le queda. Como resultado, se comió 1.000 bananas, se perdió un viaje y no dejó nada del otro lado. En consecuencia, *cualquiera* sea su estrategia, *deberá detenerse antes de llegar a los 500 metros la primera vez*.

c) El elefante deberá decidir en qué lugares parar (a cuántos metros del lado del puente en donde están las bananas) y cuántas bananas deberá dejar en cada sitio. Deberá usar esas bananas tanto en sus viajes de ida como de vuelta para poder reaprovisionarse. Este dato me parece esencial para encontrar la solución del problema.

Sigo con un último ejemplo (que *mejora* el anterior en donde el elefante llegaba con 100 bananas).

3) El elefante sale con 1.000 bananas. A los 200 metros se detiene y calcula que si quiere volver al punto inicial para buscar más, lo *mejor* que puede hacer es dejar 600 bananas en ese punto (los 200 metros). Con las 200 que le quedan, vuelve hasta donde están las 2.000 bananas. Carga otras 1.000 y llega a los 200 metros.
   Por supuesto, podría hacer como en el primer viaje y depositar allí otras 600 bananas (hasta completar 1.200). De esa forma, podría usar 200 bananas y volver. Pero eso sí: al haber dejado 'tantas' bananas a los 200 metros (como son 1.200, y él no puede cargar más de 1.000), está claro que eso lo obligará a volver a los 200 metros más veces que cuando está 'de paso'.

Con esa idea en la cabeza, al llegar a los 200 metros (ahora con 800 bananas), el elefante 'recarga' las 200 que consumió. Ahora vuelve a tener 1.000, quedan 400 bananas a los 200 metros y puede seguir caminando tranquilo.
Si siguiera hasta el final del puente, llegaría con 200 bananas, y eso ciertamente mejora lo que hicimos antes. Pero seguiría con la misma duda: ¿no se podrá *mejorar* esta estrategia y llegar con más de 200 bananas?
No perdemos nada al intentarlo. Entonces, vuelvo al caso anterior: el elefante tiene 1.000 bananas en el lomo, deja 400 a los 200 metros, pero *decide* ***no caminar*** hasta la otra orilla, sino que se va a detener en algún otro punto. Aquí, yo le propondría que sea *usted* quien piense qué es lo que conviene hacer. Yo voy a completar este argumento, pero créame que valorará más pensarlo por su cuenta que leer lo que yo escriba.
Sigo. Si el elefante piensa *volver* hasta la orilla desde donde salió (allí quedan todavía 1.000 bananas), tendrá que caminar con esas 1.000 bananas hasta algún punto en donde *pueda* dejar algunas, *de manera tal que le alcancen las que se lleva* para volver para atrás. ¿Cómo hacer esta cuenta? Por ejemplo: podría caminar 500 metros con las 1.000 bananas. Pero si lo hace, no puede dejar ninguna banana porque necesita las 500 que le quedan para volver para atrás. Por lo tanto, ¡tendrá que caminar ***menos*** de 500 metros! De acuerdo, pero ¿cuántos menos?
Yo voy a suponer que camina 300 metros más y veremos qué sucede. Naturalmente, elijo 300 metros, pero es un número arbitrario de metros. Usted (cuando siga pensando el problema) elija el que quiera. Eso sí: que sea *menor que 500*. Yo elegí 300. Cuando alcance ese punto (como había

salido desde los 200 metros), habrá llegado hasta la mitad del puente. Tiene consigo 700 bananas. Obviamente, no las puede dejar todas, pero lo que *sí* puede hacer es dejar una cantidad que le permita después volver hacia atrás. ¿Cuántas necesita? Podría dejar 200 y con las 500 que le quedan, volver hasta el punto inicial, pero eso sería poco práctico porque a los 200 metros del origen, hay 400 bananas disponibles. ¿Por qué no usarlas? En ese caso entonces, deja *400 bananas* a los *500 metros* (en donde está parado), con las 300 que le sobran vuelve hasta los 200 metros donde están las 400 bananas y, como ya no tiene más combustible, recarga 200 (deja 200) y con ellas llega al punto de partida.
Una pausa. La situación ahora es la siguiente: en la orilla izquierda (desde donde había salido originalmente) hay 1.000 bananas que aún no usó. A los 200 metros hay 200 bananas y a los 500 metros hay 400 bananas. ¿Qué puede hacer? (¿No quiere pensar usted?)
Sigo. Toma las 1.000 bananas que le quedan. Camina 200 metros y se consumió 200 bananas, pero afortunadamente para él, ¡allí lo están esperando 200 bananas exactamente! Vuelve a tener 1.000 bananas. Más aún: tiene una carga completa, está a 200 metros del lugar inicial y lo esperan 400 bananas 300 metros más adelante.
El elefante camina entonces 300 metros más y llega con 700 bananas. ¡No puede recoger las 400 que hay allí porque sobrepasaría el límite de 1.000 que puede llevar! ¿Qué hacer entonces? Se recarga hasta llegar a las 1.000 (para lo cual necesita 300, pero lamentablemente dejará 100 a mitad de camino y veremos si puede volver a buscarlas), y con las 1.000 que tiene, camina los 500 metros que le quedan y llega a la otra orilla con ¡500 bananas! Evidentemente,

hemos mejorado *muchísimo* todas las estrategias que habíamos utilizado antes.

Este ejemplo muestra que se puede llegar del otro lado con 500 bananas. La pregunta entonces es: ¿se puede mejorar esta estrategia? ¿Hay *alguna* otra forma de que lleguen *más de 500 bananas* al otro lado del puente?

La respuesta es que *sí*, que se puede. Pero ahora, definitivamente, ¡le toca a usted! El próximo paso que escriba será la solución final.

La solución general

Tal como me había comprometido, quiero incluir aquí lo que me había enviado Carlos en su correo electrónico de octubre del año 2015. Eso sí: es una solución que requiere un poco de paciencia y sobre todo, aceptar la *terminología* que suele ser muy fastidiosa para quien no está acostumbrado a 'pensar' en términos más abstractos. La incluyo acá, porque me parece pertinente hacerlo, pero si usted se siente satisfecha/o con lo que leyó, puede salteársela y no pasará nada. Eso sí: si me puedo permitir pedirle algo más, léala y haga un *mínimo* esfuerzo por entender el texto. Si lo logra, verá que no hay nada tan sofisticado ni difícil. Es solo una manera de 'evitar' hablar de casos particulares y de encontrar una *estrategia general* que sea la *mejor* de todas las posibles.

Carlos me escribió:

> Adrián, te paso un esbozo de solución, que es la que se me ocurrió a mí y más o menos lo mismo pensaron Juan Carlos y su hijo Pol. Tendrás que 'seguirla' con un poco de paciencia y de cuidado. En el camino, quizás tengas que 'creerte' algunas cosas que (me parece) son obvias, pero funciona.

Y siguió con este texto: "Te dejo acá algunos razonamientos ***sueltos***, que conducen a la solución". Para poder escribir y/o encontrar la solución definitiva, como le advertí recién, me hará falta usar algunas 'letras'. Si usted leyó hasta este punto, recordará que fui eligiendo *arbitrariamente* lugares intermedios en donde el elefante fue parando. La primera vez, lo hice detenerse a los 200 metros. Después, en la última estrategia, la que le permitía llegar con 500 bananas, elegí que se detuviera por segunda vez justo al llegar a la mitad del puente (a los 500 metros). Pero todos esos puntos son *objetables*. Cualquier persona que esté leyendo este texto podría preguntarse (y con razón): "¿De dónde salieron los 200 metros o los 500 metros? ¿Por qué eligió que el elefante se detuviera allí? ¿Cómo se le ocurrió eso?".

Ahora, para evitar esas arbitrariedades, voy a usar 'letras' que serán las 'incógnitas' que queremos 'despejar'. Es decir, tanto usted como yo queremos encontrar *cuáles son los mejores lugares* (o los lugares *óptimos*, si prefiere) donde el elefante debería parar y descargar algunas bananas. Es decir, que las incógnitas que tenemos que despejar son varias: los lugares en donde habrá de pararse, la cantidad de bananas que debe 'descargar' en cada lugar y las que tendrá que reponer cuando tenga que 'recargar' su 'combustible'.

Para poder encontrar la solución, uno *sabe* que el elefante *tendrá* que detenerse *dos veces* al cruzar el puente. En el primer viaje, voy a llamar X a la distancia que recorrió (X metros) desde el punto inicial. En el segundo viaje, voy a llamar Y a la distancia que recorrió ***desde*** X. Es decir, en el segundo viaje, el elefante camina hasta (X + Y). Por último, en el tercer viaje, voy a llamar Z a la distancia que recorre el elefante ***desde*** el punto (X + Y). Al detenerse habrá recorrido (X + Y + Z)[17].

---

17. Si prefiere, piense que en el último ejemplo la X es el número 200 (por

Ahora sí, la 'solución'.

a) Para llevar la cantidad máxima de bananas, el elefante tiene que haber pasado al menos dos veces más por el punto de partida. Si no, no podría cargar las 3.000 bananas con él.
b) Supongamos que hizo el recorrido en tres etapas. Llamemos X a la distancia que recorrió la primera vez. Llamemos Y a la distancia que recorrió la segunda vez, luego de haber superado el punto X. Ahora llamemos Z a la distancia que recorrió la tercera vez luego de haber superado el punto (X + Y). Como hizo el recorrido en tres etapas, hay una 'igualdad' que *tiene* que ser cierta:

$$(X + Y + Z) = 1.000$$

¿Por qué? La idea es que en el último viaje, cuando el elefante ya haya superado los lugares X primero, y después (X + Y) en el segundo, al cubrir la distancia Z le *tiene* que alcanzar para llegar del otro lado del puente.

Ahora le propongo que piense junto conmigo, y sobre todo que no avance si no me sigue. Pare y reflexione hasta que me comprenda. Y si no, haga *usted* su propio razonamiento.

En la primera etapa, la cantidad de bananas que pudo haber dejado en el punto a distancia X de la partida *tiene* que ser *me-*

---

los 200 metros en los que el elefante se detiene la primera vez). La Y son los 300 metros *más* que el elefante camina (hasta llegar a la mitad del puente). Por último, la Z es la distancia que le hace falta caminar ¡hasta llegar a la otra orilla! En el caso del último ejemplo, como (X + Y) = (200 + 300), la Z resulta ser 500 metros. Pero, claro, le planteo esto solo como una idea para que no se 'pierda' con todas las letras.

nor o igual que 1.000 – 2X[18]. ¿Por qué? Si dejara más bananas, las que se llevara con él serían *menos que* X, por lo tanto, no le alcanzarían para volver para atrás. O sea, el elefante *tiene* que dejar una cantidad de bananas *menor o igual* que 1.000 – 2X en el primer lugar en que se detenga.

Recuerde que el elefante volvió hasta el punto de partida, dejó *a lo sumo* 1.000 – 2X bananas a los X metros, y ahora cargó nuevamente 1.000 bananas. Al llegar al punto X metros, recoge X bananas (quedan 1.000 – 3X allí), pero él tiene otra vez 1.000 bananas.

Al llegar al punto a distancia (X + Y) del origen, igual que antes, la cantidad de bananas que puede dejar allí tiene que ser *menor o igual* que 1.000 – 2Y. Eso lo puede conseguir de esta forma (y es 'fácil' verificar que cualquier otra posibilidad lo hace consumir más bananas): *sale con 1.000 bananas. Al llegar a X ya tiene (1000 – X). Repone X bananas y vuelve a tener 1.000 bananas con él, pero ahora hay (1.000 – 3X) bananas en el lugar X.*

Al llegar al punto (X + Y) se desprende de 1.000 – 2Y bananas, y con las Y bananas que se queda, camina en sentido inverso hasta llegar al punto X. Allí, sube X bananas (quedan 1.000 – 4X en ese lugar), pero le alcanzan para llegar al punto de partida otra vez. Sube las últimas 1.000 bananas, camina hasta los X metros, recarga las X bananas que consumió (ahora allí quedan 1.000 – 5X bananas), cuando llega al punto (X + Y) tiene 1.000 – Y bananas, 'recarga' Y (ahora quedan 1.000 – 3Y en ese lugar), y con las

18. En el último ejemplo, como la distancia X = 200, la cantidad de bananas que puede dejar el elefante tiene que ser *menor o igual* que 600. ¿Por qué? Como llegó con 800, si deja más de 600, ¡no le van a alcanzar las bananas para volver al punto inicial! Luego, *a lo sumo* puede dejar 1.000 – 2 × 200 = 1.000 – 400 = 600. En el caso general, tiene que dejar una cantidad *menor o igual* que 1.000 – 2X.

1.000 que vuelve a tener, camina los Z metros que le faltan. Le quedan en total 1.000 – Z bananas.

Los problemas por resolver son:

a) $(X + Y + Z) = 1.000$.
b) $(1.000 - 5X)$ tiene que ser un número *mayor o igual* que CERO.
c) $(1000 - 3Y)$ *también* tiene que ser un número *mayor o igual* que CERO.

¿Qué hacer? Como se trata de *maximizar* $(X + Y)$ (que es igual a $1.000 - Z$) de acuerdo con la igualdad (a), sabiendo que $(1.000 - 5X) \geq 0$ y que $(1.000 - 3Y) \geq 0$, y todos los números involucrados (X, Y, Z) tienen que ser números enteros no negativos.

De la parte (b), para que $(1.000 - 5X) \geq 0$, se deduce que X tiene que ser *menor* o *igual* que 200, y de la parte (c) se deduce que $(1.000 - 3Y) \geq 0$, o sea, Y tiene que ser *menor o igual* que 333.

Luego, tomando $X = 200$, $Y = 333$, se deduce que $(X + Y) = 533$, ¡que resulta ser la ***cantidad máxima de bananas*** que se pueden cruzar!

La manera de lograrlo entonces es usando esta estrategia:

- Tomar 1.000 bananas. Avanzar 200 metros. Dejar 600 bananas allí y volver al punto de partida.
- Tomar una nueva carga de 1.000 bananas. Avanzar 200 metros. Reponer 200 bananas de la pila de 600 (allí ahora quedan 400).
- Avanzar 333 metros más y dejar $(1.000 - 2 \times 333) = 334$ bananas allí. “Allí” significa a los 534 metros del lugar de partida.

- Retroceder hasta la primera parada, la que está a 200 metros del punto de partida. Recargar 200 bananas de allí (quedan nada más que 200 ahora) y volver hasta el punto inicial.
- Cargar las últimas 1.000 bananas. Al llegar a los 200 metros, recoger las 200 bananas que quedaban (ahora ya no hay nada más allí). Con las 1.000 bananas, caminar 333 metros. El elefante llega con (1.000 – 333) = 667 bananas. No puede cargar las 334 que hay allí porque sobrepasaría el límite de 1.000. Sube 333 bananas (¡deja *una banana* en ese lugar!) y con las 1000 que tiene, camina los (1000 – 534) = 467 metros que le faltan para llegar hasta la otra costa. ¿Cuántas bananas tiene en total? Haga la cuenta y verá que llegó con 533 bananas. ¡Y esta cantidad, 533, es el número *máximo* de bananas que puede cruzar el elefante con las restricciones que hemos impuesto!

Entonces, esta estrategia permite decir que se pueden trasladar 533 bananas. Ahora bien, yo escribí en el párrafo anterior que es el *máximo* número de bananas posibles de ser trasladadas, pero ¿no habrá *alguna* otra distribución de las cargas, aumentando incluso el número de viajes, que permita incrementar el número de bananas que el elefante puede llevar? ¿No tiene ganas de pensar por su cuenta?[19]

Hasta acá llegué yo, pero como usted advierte, hay una parte del problema que aún sigue 'abierto'.

---

19. En realidad, debería tener *cuidado* con lo que escribí. Debería poner que 'esta estrategia' permite transportar 533 bananas, pero ¿no habrá alguna *otra* distribución de las cargas e incluso del número de viajes que la 'mejore'? Es decir, queda el problema abierto, si uno se permite utilizar más viajes.

¿Qué piensa usted?

Ahora, quiero agregar dos apéndices, uno de Carlos Sarraute y otro de Carlos D'Andrea. Por cuestiones de brevedad, tuve que 'editarlos', pero no mucho. La esencia está respetada *tanto* como fui capaz.

Apéndice 1. Un aporte de Carlos Sarraute

Hola Adrián!

Te cuento lo que pensé (ayer a la noche).

Al principio, para mover las bananas un metro, el elefante tiene mover 1.000 y volver al punto de partida (comiendo 2 bananas), mover otras 1.000 y volver (comiendo 2 bananas más), y luego mover las que quedan (1 banana más). O sea, consume 5 bananas para mover todas las bananas 1 metro.

Luego de hacer 200 metros así, consumió 1.000 bananas, le quedan 2.000 bananas y la situación cambia. Ahora necesita solo 3 bananas (3 movimientos) para mover todas las bananas un metro.

Moviendo las bananas de esa manera, luego de hacer 333 metros, consumió 999 bananas más.

En este momento, hizo en total 200 + 333 = 533 metros. Y le quedan 2.000 – 999 = 1.001 bananas.

Ahora le conviene descartar una banana, cargarse 1.000 bananas e ir avanzando hasta el final, comiendo 467 bananas para hacer los 467 metros que le faltan.

Cuando llega, le quedan 1.000 – 467 = 533 bananas.

Creo que podría llegar con una más, si puede comer la banana antes de caminar un metro (yo consideré que la come al final o durante el metro) ;-)

Un abrazo!

Carlos

Apéndice 2. Otro aporte de Carlos D'Andrea

Hola Adrián,

Leí anoche antes de dormir el archivo que me enviaste. Es interesante lo que hay ahí y te explico por qué:

Cuando me dijiste que ibas a escribir sobre el problema del elefante y las bananas, yo no recordaba habértelo contado pero sí recordaba el problema: lo propusimos para el primer torneo de otoño que hicimos en agosto de 2015 en la facultad[20] (es el problema 4, está en catalán aquí): https://mat.ub.edu/matapps/olimpiades/wp-content/uploads/sites/10/2017/09/2015_torneig_tardor.pdf

En ese momento no teníamos una solución concreta del problema (conocíamos "la óptima" de 533 pero no sabíamos —aún— que fuera óptima) y esperábamos que algún alumno "nos la contara", es decir que resolviera bien el problema y de paso aprendíamos nosotros. Eso no ocurrió. Con suerte hubo una sola persona (la que ganó el torneo) que encontró el 533 con alguna heurística que no se justificaba bien.

Yo siempre me quedé con la impresión de que nunca pudimos realmente "resolver" ese problema y si bien me imagino habiendo compartido con vos el enunciado, no recuerdo nada más. Por eso cuando me contaste que habías escrito algo sobre eso me dio un poco de miedo por saber qué era lo que ibas a poner por resolución. Bien, después de leer que "tu resolución" es en realidad "nuestra resolución" (la de Juan Carlos, Pol y yo), creo recordar algo así como conversar con JC y P durante algún almuerzo justamente yo intentando encontrar alguna resolución (quizás para contártela más tarde) y que Pol nos ayudara a hacer esa optimización… ¡Pero tampoco podría asegurar que eso ocurrió así!

La parte final (la de la resolución por optimización) la dejaría así

20. Cuando Carlos dice 'aquí', se refiere a la Universidad de Barcelona en donde él es profesor.

como está porque quien ha llegado leyendo hasta allí, o bien quiere saber la respuesta (que aparece debajo) o bien entender cómo llegar a ella y eso lo conseguirá si lee el razonamiento que escribiste. Me tomé un rato para verificar que con menos de 3 cruces no se puede llegar a nada, y que con más de 3 el problema es "suboptimal". Me da un poco de miedo que saques un problema así "al aire" y que después te lluevan 14.000 erratas de cuál era la respuesta correcta.
En lo más fino,
* Cuando decís "El problema es tratar de encontrar cuál es el número máximo de bananas que puede transportar haciendo para ello, el mínimo número de viajes", en realidad si bien parece intuitivo que más viajes realizados implica más bananas consumidas, lo que estás queriendo optimizar es el número máximo de bananas que puede transportar del otro lado. Si lo hace en 3 o 20 viajes, no importa.
* "Está claro que el elefante, si quiere tener 'chance' de trasladar en algún momento todas las bananas, tendrá que hacer por lo menos tres viaje". Esto también parece intuitivamente cierto, pero a lo mejor la solución optimal podría ser que deje alguna banana en el punto de partida inicial…
* Me gustan tus frases "el elefante se detiene, calcula, piensa…" como si estuviéramos asumiendo que se trata de un elefante inteligente que hace todo eso! :-)
Suerte con todo,
Un gran abrazo,
Carlos

Teoría de Juegos. Dos paradojas

Quiero empezar con una anécdota.

El segundo campeonato mundial de fútbol de este siglo se jugó en Alemania. Fue en el año 2006. La Argentina llegó hasta los cuartos de final y, justamente en ese partido que *debía* decidir un ganador (no podía terminar en empate), le tocó jugar contra el país anfitrión.

Los 90 minutos reglamentarios terminaron empatados: 1 a 1. Se jugaron 30 minutos suplementarios. Como no hubo más goles, hubo que recurrir a la definición por penales. Cada equipo eligió cinco jugadores y el orden en el que habrían de ejecutar. Alemania ganó el sorteo y optó por patear *primero*[21].

¿Por qué estoy contando esta historia aquí y ahora? Porque el arquero alemán, Jens Lehmann, produjo un episodio inédito. Antes de que el primer jugador argentino pateara el primer penal (Julio Cruz), Lehmann sacó un *papelito* que tenía guardado

21. Si esta serie de diez penales no alcanza para decidir, se siguen pateando, una vez cada uno, siempre en forma alternada hasta agotar la lista completa de jugadores que estaban en la cancha (excluyendo a los suplentes) en el momento que finalizaron los 120 minutos. Nadie puede repetir y el orden establecido se mantiene hasta que haya un ganador. *Obviamente*, alguna vez termina. Al menos, esto pasó hasta hoy en todos los torneos…

debajo de la media que usaba en la pierna derecha, y lo leyó. Este procedimiento lo repitió *antes* que pateara cada jugador argentino.

La Argentina no llegó a patear los cinco, porque mientras Alemania convirtió los cuatro que ejecutó, la Argentina erró dos de los primeros cuatro y por lo tanto quedó eliminada antes de llegar al último. Los dos que convirtieron fueron Julio Cruz y Maxi Rodríguez, y los dos que 'atajó' el arquero alemán los patearon Roberto Ayala y Esteban Cambiasso. Pero lo notable es ¿qué decía el *papelito*?

Si hubiera pasado hoy, tendríamos derecho a pensar que los alemanes tenían una *montaña* de información sobre los pateadores argentinos, sus tendencias o preferencias, porcentajes ejecutados hacia arriba o hacia abajo, hacia la derecha o hacia la izquierda o incluso hacia el medio, más fuerte o más suave, y qué diferencias había ante situaciones de mayor o menor presión, con el resultado del partido en discusión… en fin, todas las variantes que se le ocurran. Una vez más, ¿qué decía el *papelito*?

A esta altura, poco importa. Lo único que interesa es que, dijera lo que dijera, le sirvió a Lehmann para *ganar una pequeña ventaja* sobre los pateadores argentinos. ¿Tendrían los alemanes datos sobre cada uno verdaderamente? Si usted hubiera estado en el lugar de alguno de los que pateaban, ¿qué habría hecho? ¿Habría pateado siguiendo sus tendencias naturales o habría cambiado para desorientar a quien había recolectado los datos? ¿Habría pateado como 'casi siempre' o habría modificado su preferencia?

Con el tiempo, Lehmann declaró que el *papelito no decía nada*: *¡era un papel en blanco! ¡Misión cumplida!*

Para no recurrir solamente al fútbol, hay una espectacular película francesa (*I, como Ícaro*) estrenada hace cuarenta años

(el 19 de diciembre de 1979), en donde el protagonista, Yves Montand, se enfrenta a un grupo de jueces (no recuerdo bien si eran integrantes de la Corte Suprema o algo equivalente). Montand los acusa de haber impartido una 'orden' (que ellos niegan). Mientras tanto, él tiene una carpeta en donde se ven algunos papeles, pero no se los puede leer. Mira a los jueces y les dice que él tiene la prueba allí, en sus manos, una fotocopia de esa 'orden'. La audiencia es televisada en vivo, y la sala está repleta de periodistas. La tensión que se genera es maravillosa. ¿Tiene la prueba o no? El silencio que se produce es estremecedor. En un momento determinado, la cámara acerca su lente para que se pueda ver lo que dice *ese particular papel*.

Acá paro, porque no le quiero arruinar la película, pero si me permite que le sugiera algo, si tiene tiempo y puede, no se la pierda. Es una de las tres mejores películas que vi en mi vida, y no solo por ese episodio. Es una película *extraordinaria*.

La Teoría

Hay una rama de la matemática que se llama Teoría de Juegos. Esta teoría sirve para 'modelar' situaciones de la vida real en donde cada participante (o jugador) tiene que elaborar alguna estrategia para tomar decisiones que no solo lo afectan a él (o a ella), sino que están interrelacionadas con las decisiones de los otros participantes. Se supone que todos y cada uno de ellos opera con el mismo nivel de lógica y *siempre* hacen lo que es más conveniente, o lo que cada uno *cree* que es la mejor estrategia.

Ese partido que se jugó en el mundial de Alemania 2006 con Lehmann y los jugadores argentinos es un ejemplo extraordinario para lo que quiero contar acá. Justamente, estos son dos de

los casos más emblemáticos (y por lo tanto, más conocidos) de la Teoría de Juegos.

Paradoja del extorsionador

Robert Aumann es un matemático israelí, nacido en junio de 1930. Educado en Estados Unidos, compartió el premio Nobel de Economía en el año 2005 con Thomas Schelling, en particular por sus contribuciones a la Teoría de Juegos. Sus trabajos son citados mundialmente y tiene un gran prestigio internacional.

Aumann vino a la Argentina hace una década (en octubre de 2009) y allí tuve oportunidad de conocerlo, conversar con él en forma profesional y privada. Le hice una nota para el programa *Científicos Industria Argentina*, y conocí de primera mano algunos de sus aportes. Hay uno en particular que me resultaba (y me sigue resultando) especialmente intrigante. De él quiero escribir ahora y estoy seguro de que le resultará tan fascinante como a mí. Acompáñeme por acá.

Aumann describe una paradoja que denominó la “Paradoja del extorsionador” (*The Blackmail Paradox*). Voy a escribir una versión mía, adaptada del original, pero que contiene en esencia todo lo que hace falta para poder pensar.

Suponga que usted y yo entramos en una habitación en donde un señor con un maletín negro nos dice:

> Vean, dentro de esta ‘valijita’ hay un millón de dólares en efectivo. Yo los voy a dejar solos en la habitación para que piensen cómo distribuir el dinero entre ustedes dos. Yo volveré en una hora. Si pasado ese tiempo, ustedes me dicen que han llegado a una decisión de cómo habrán de repartirlo, voy a proceder a hacer la distri-

> bución que ustedes me indiquen. En cambio, si no logran ponerse de acuerdo, yo retiro la oferta y los dos se quedan sin nada. ¿De acuerdo?
>
> Ahora sí, hago correr mi cronómetro. Tienen una hora para decidir qué van a hacer.

Naturalmente, si usted llegó hasta acá, después de haber leído el párrafo anterior debe estar pensando que hay 'algo' que no entendió. Digo, ¿qué tiene de *intrigante* la oferta del señor del maletín? Me imagino la confusión que usted debe tener: ¿qué es lo que hay que decidir?, ¿qué estrategia hay que determinar? ¿O es que leí algo mal?

No, entendió bien, leyó bien. La *única* dificultad radica en que usted sospecha (como lo hice yo e intuyo que cualquier persona a quien se le plantee la oferta del 'señor del maletín') que la solución es decir: "Dividamos por dos el dinero: vos te quedás con 500 mil dólares y yo también. No dejemos que se vaya el señor. Llamémoslo rápido y digámosle que ya está todo decidido. No vale la pena esperar una hora". Sin embargo, hay algo que no estamos considerando. Supongamos que usted me dijera: "Adrián, todo bien, pero yo me voy a quedar con 900 mil dólares y vos quedate con los 100 mil restantes".

Es muy probable que yo la/lo mire con estupor, pensando que es una broma. Sonreiría y esperaría que usted abandonara esa cara tan seria y se riera junto conmigo. Pero bien podría pasar que eso no ocurriera… y aun peor. Imagínese a usted misma/o diciéndome: "Mirá, aceptá rápido lo que te ofrecí porque no quiero tener que esperar por tu respuesta. Más aún: si no me decís que aceptás lo que te propuse, estoy dispuesta/o a darte solamente 10 mil y yo quedarme con los restantes 990 mil. Decime que sí rápido y terminamos el debate. Si no, cuando vuelva le

decimos que no nos pusimos de acuerdo y los dos salimos de la habitación como entramos: con 'cero' dólares cada uno".

Sí, ya sé, no puede creer lo que está leyendo. Aunque no parezca posible, en la vida cotidiana este tipo de situaciones no solo *pueden* darse sino que *se dan*, *suceden* y hay múltiples ejemplos en la historia de que esto ha pasado.

De hecho, Aumann y varios de sus discípulos han escrito que en negociaciones que se sucedieron a lo largo de los años entre árabes e israelíes, este tipo de situación se ha planteado en múltiples oportunidades. Es decir, si la propuesta fuera hecha ante dos amigos, es muy posible que el resultado sea el que usted esperaba cuando leyó el planteo, pero cuando los que están dentro de la habitación y sentados en una mesa de negociaciones son dos partes que están 'enfrentadas', el resultado no es el que usted (y yo) suponemos *natural* o *esperable*.

Aumann me señaló que cuando Israel se sienta en una mesa para negociar, muchas veces lo hace en una posición de debilidad y debe estar preparado para que sus contrapartes se levanten y se vayan sin inmutarse. O quizás, según palabras del propio Aumann, Israel entra en tratativas sabiendo que necesita *llevarse algo* de lo que está en disputa, lo cual sitúa a los negociadores israelíes en una posición claramente desventajosa[22].

Uno de sus discípulos, Haim Schapira, otro especialista en Teoría de Juegos, escribió en su libro *Gladiators, Pirates and Games of Trust* (*Gladiadores, piratas y juegos de confianza*, mi

22. Como nunca estuve en ninguna negociación de este tipo, bien podría suceder la situación *inversa* y que fueran los representantes árabes quienes entran en una posición de debilidad. En cualquier caso, a los efectos de lo que quiero plantear, sean unos u otros, la "Paradoja del extorsionador" se aplica (o aplicaría) para las dos partes.

traducción personal porque no sé si existe la versión en español del libro) que alguna variante de la “Paradoja del extorsionador” fue utilizada en la Conferencia de Paz que se hizo en París en el año 1919, y que derivó en lo que se conoce como Tratado de Versalles. O si no, en el Pacto Mólotov-Ribbentrop en 1939, o más recientemente en las conversaciones entre Irán y un grupo de países considerados potencias mundiales, para discutir sobre la ‘desnuclearización del país islámico’.

Piense en una partida de ajedrez (y no importa si usted no sabe jugar. Yo tampoco, salvo mover las piezas). Es posible que, en aras de mejorar su posición, esté dispuesto a ‘sacrificar’ un caballo, o una torre o incluso la dama… pero, lo que es seguro es que no estaría dispuesto a entregar el rey, o sea, *toda la partida*. ¿O sí?

Después aparecen las consideraciones más ‘humanas’. ¿Hasta cuándo está dispuesta/o a aceptar una persona sin sentirse ‘humillada’ por la oferta? ¿Es preferible levantarse de la mesa con ‘nada’, antes que tolerar una propuesta ‘agraviante’?

Otra variante podría ser que uno supiera que la reunión no será única, sino que eventualmente las partes deberán volver a la mesa a negociar otra vez u otras veces. ¿Qué hacer? Si uno acepta una oferta muy baja, sabe que eso será tomado como ‘base’ en cualquier negociación futura. ¿Cómo habría de cambiar el proceder de cada parte si en lugar de tener que negociar una vez, las partes *saben* que la situación habrá de repetirse inexorablemente?

Creo que no hace falta que avance más. A partir de acá, usted misma/o puede decidir qué hacer en otras variantes que se le ocurran. Solo pretendía mostrar que cuando uno está convencido de que *no hay dos posibilidades*, súbitamente aparecen muchas y muy diferentes de lo que uno espera. Como siempre, suele ser muy útil estar preparado, educado. Si necesita usar el

ejemplo anterior, no será la primera vez que se tropiece con él. Y si no, solo le agregará a su 'cultura general'.

Cómo ganar un auto votando por lo que uno *no cree*

El problema que sigue es una adaptación libre (como verá dentro de un par de párrafos, resulta ser *muy muy libre* mía) sobre un escrito del famosísimo economista inglés John Maynard Keynes (1883-1946). La obra completa de Keynes es considerada como *seminal* y *referencial*. Obviamente, no soy experto en economía, por lo que tome cualquier opinión que aparezca a continuación como una *no educada*. Sin embargo, el caso que quiero ofrecer me parece espectacular y dice mucho más sobre el comportamiento humano que sobre cualquier teoría económica. Verá también que todo lo que hace falta es *pensar* y, encima, en algo que realmente vale la pena.

El trabajo al que voy a hacer referencia está en el capítulo 12 del libro *Teoría general de la ocupación, el interés y el dinero* que Keynes publicó en el año 1936. Sígame por acá y verá qué interesante.

Suponga que una compañía automotriz decide hacer un concurso en la Argentina de manera tal que el ganador se llevará un auto. La fábrica promociona su marca publicando durante todos los días de una semana una página completa en todos los diarios nacionales.

¿Qué hay en la página? Allí figuran los nombres, acompañados por una foto, de treinta jugadores argentinos que están jugando en el país. Me voy a tomar una 'licencia' en cuanto a los nombres de los jugadores pero no afectará en nada el objetivo del texto.

Si una persona quiere participar en el concurso, debe poner dentro de un sobre el nombre del jugador que esa persona considera que es el mejor de la lista de treinta. Solamente se permite un solo voto por persona y, para garantizar que nadie participe más veces, dentro del sobre deberá figurar el número de documento del participante.

El concurso durará nada más que un mes (digamos, durante julio de 2019). Una vez que haya cerrado, el 1° de agosto del mismo año, se abrirán todos los sobres ante un escribano y se hará una lista de la cantidad de votos que obtuvo cada jugador. Salvando un potencial empate (que definirá el presidente de la compañía), habrá un *ganador*. Se juntarán todos los sobres de los participantes que votaron por ese jugador, y el presidente elegirá uno de los sobres. Esa (o ese) participante se hará acreedor al auto. ¡Y listo!

Pregunta: ¿cómo jugar a este juego? Si usted quisiera participar, ¿qué haría? (la/lo dejo pensando un instante).

Claro, quizás usted se está preguntando: "¿Qué es lo que tengo que pensar?". Bueno, uno podría no pensar nada y directamente incluir en el sobre el nombre del jugador que uno cree que es el mejor, anotar su número de documento para garantizar la identidad y nada más. Y si usted hace eso, estará muy bien. Suponga que su favorito es Ponzio, el jugador de River. ¿Usted votaría por él? Por supuesto, si usted quiere que su voto 'cuente' y que la gente *sepa* que usted lo cree el mejor jugador (entre esos treinta), vote por Ponzio y listo. Sin embargo, quizás no le interese tanto que su opinión sea tenida en cuenta y preferiría ganar el auto, ¿no es así?

En ese caso, la idea sería no votar por Ponzio sino por el jugador que *usted cree que es el favorito de la mayoría*: Riquelme, el jugador de Boca (suponiendo que todavía siguiera en

actividad). ¿Por qué? Es que si usted quiere aspirar a ganar el auto, su sobre tendrá que estar incluido entre los que elija el presidente. Para que eso suceda, el jugador que usted elija debe ser el que ***usted cree*** que va a elegir la mayoría de los votantes, o sea, Riquelme.

Como seguramente advertirá, esto requiere pensar un poco más. Una cosa es poner "Ponzio" y se termina la discusión (para usted). Ahora, si usted cree que él no va a ser el elegido e intuye que la mayoría de los potenciales participantes votaría por Riquelme, ¿para qué va a 'tirar' su voto? ¿No quería ganar el auto? Usted sabe que si vota por Riquelme incrementa sus posibilidades, aunque 'traicione' sus principios. Pero acá empieza *otra* historia: qué es lo que creerá la mayoría y luego votar por ese jugador en particular.

Sin embargo, uno podría 'sofisticar' el análisis un paso más. ¿Cómo? Imagine que no es solamente usted quien decide votar de esa forma, sino que todos los participantes hicieran el mismo análisis. Es decir, los demás utilizarán la misma lógica: no necesariamente votarán por el que *cada uno* cree que es el mejor jugador, sino que votarán por lo que cada uno cree que la *mayoría de los votantes* va a elegir. En ese caso, usted debería pensar lo que usted *cree* que la mayoría de los otros participantes *cree* que la mayoría va a pensar. Por ejemplo, usted supondrá que la mayoría va a decir: "Yo votaría por Riquelme, pero me doy cuenta de que la mayoría de los participantes no va a pensar así, y advertirán que Riquelme es un voto *emocional* mientras que el *verdadero mejor jugador* de esa lista es Pablo Aimar", el jugador de River (si es que todavía estuviera en actividad él también). Por lo tanto, no alcanza(ría) con pensar qué es lo que van a votar los otros: uno debería ser capaz de intuir qué es lo que la mayoría

de los otros participantes creen que van a pensar, y por ende votar a ese jugador.

Antes que me lo diga usted, es como si pudiera *leer* su pensamiento. Todo esto parece un *trabalenguas*, pero si lo piensa un rato, descubrirá que no solo *no es un trabalenguas* sino que es muy posible que usted tenga más posibilidades de acceder al auto pensando de esta forma que ignorándola.

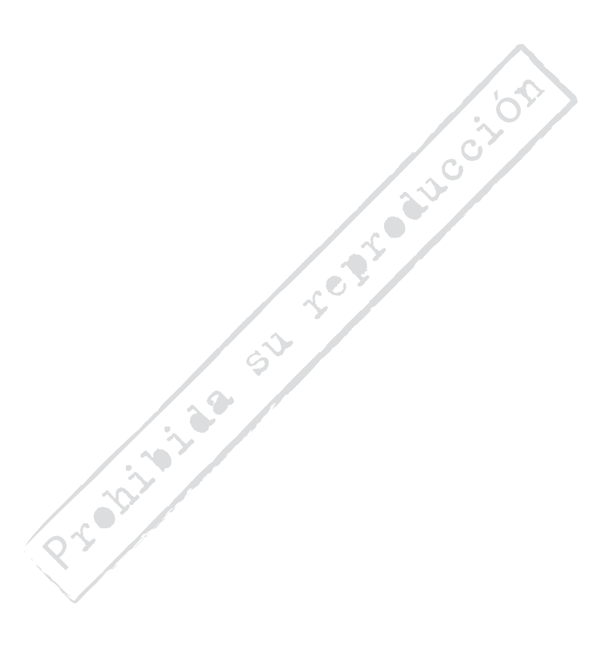
Yo voy a parar acá, aunque el nivel de sofisticación podría continuar. Lo interesante es pensar que Keynes no escribió el capítulo 12 de su libro pensando en jugadores del fútbol argentino. Lo que *sí* hizo fue tratar —por ejemplo— de describir cómo él creía que funcionaba la bolsa o el mercado de valores en Gran Bretaña.

Y subrayó que no se trata de comprar acciones de una compañía porque *usted cree* que la compañía es *buena* y, por lo tanto, la acción va a aumentar. Eso está bien, pero sería como votar por Ponzio. En realidad, usted debería (o podría) deducir qué es lo que usted *cree que suficientes personas* (o una buena porción del público que compra acciones) van a *creer* que son buenas compañías y, en consecuencia, comprarán las acciones correspondientes. Luego, la mayor demanda hará subir el precio. Y así siguiendo. *Esas* serían las acciones que usted tendría que comprar.

En todo caso, este es un ejemplo más de que no todo es tan sencillo ni tan trivial como parece. Si el objetivo suyo era 'enseñarle a todo el mundo que Ponzio es el mejor jugador', hace bien en votar por él, de manera tal que cuando se haga el recuento final, Ponzio aparezca en la lista con al menos un voto.

Pero si su objetivo es ganar el auto y cree que la mayoría no coincide con *su percepción*, le conviene votar por Riquelme. Ahora bien, si sospecha que los otros participantes (o una porción

mayoritaria) hará el mismo análisis que usted, le conviene entonces… (le dejo la oportunidad de completar la oración como la/lo haga sentir más cómoda/o[23].



23. Votar por Riquelme sería el primer nivel de 'sofisticación'. El segundo sería tratar de anticipar a qué jugador de la lista los participantes *creerán* que los *otros* van a elegir. Keynes escribió en su texto: "Uno tiene que dedicar su inteligencia en anticipar lo que el promedio de los participantes supondrá que será el promedio de las opiniones de los participantes". Naturalmente, uno puede seguir avanzando de nivel en forma indefinida.

Voltaire

¿Cuánto sabe usted de Voltaire? Créame que antes de investigar y leer para poder escribir este artículo, mi conocimiento sobre él se podía calificar entre *nulo* y *muy pobre*. En todo caso, nació como François-Marie Arouet, pero supongo que nadie lo reconocería sino por su sobrenombre (Voltaire). Fue un pensador, escritor, filósofo e historiador francés de la época del Iluminismo (o Ilustración).

Se lo reconoce como enfrentado al cristianismo en general y a la Iglesia católica en particular, defensor de la separación entre religión y Estado. Nació en París el 21 de noviembre de 1694 y murió, también en París, el 30 de mayo de 1778. Es reconocido como uno de los filósofos, escritores e intelectuales más respetados del siglo XVIII. Fue el hijo menor de una familia de clase media alta, parte de la aristocracia francesa y sus padres tenían la aspiración que se convirtiera en un 'gran abogado'. Estuvo preso once meses en la famosa prisión de la Bastilla, en donde los historiadores sostienen que comenzó su carrera como escritor. Después se exiló en Inglaterra y cuando volvió…

Cuando volvió, mientras recorría su tercera década de vida, comienza lo que quiero contar acá. Esta historia tiene *muy poco*

de lo que transformó a Voltaire en una persona prestigiosa o famosa y tiene *mucho* de lo que lo hizo muy rico.

Un poco de contexto

El gobierno francés, necesitado de dinero (no me diga que le suena familiar…), había decidido emitir bonos del tesoro con distintas denominaciones, tal como hacen —casi— todos los países del mundo. Por ejemplo, había bonos que valían 1.000 libras, otros 10.000, otros 100.000. Es decir, una variedad importante, de manera tal que toda persona que quisiera 'ahorrar' usando esos bonos, podía elegir las diferentes denominaciones de acuerdo con su poder adquisitivo. El problema es que cuando arribó el momento de su expiración o en el momento de tener que pagar los intereses —como también suele pasar en todos los países del mundo—, se encontraron con una dificultad mayor: no tenían el dinero suficiente para hacerlo.

La situación se hizo realmente crítica, y supongo que en aquel momento no podían recurrir al equivalente de lo que hoy termina agravando todos los problemas de cualquier país: "Hablar con la gente del FMI". Hacerlo termina hundiendo al país en cuestión. El equivalente de quien hoy sería el viceministro de Economía, Michel Robert Le Pelletier-Des Forts, tuvo una idea que muchos consideraron 'brillante', pero usted verá que no les fue mucho mejor. Fíjese por qué.

Al viceministro se le ocurrió 'ligar' los bonos en cuestión con billetes de lotería. Sí, aunque parezca raro, a pesar del tiempo transcurrido —hablamos del siglo XVII— ya existía la lotería, tal como sucede hoy. Uno compraba un billete con un determinado número, había un sorteo semanal (el mayor era, como en la actualidad, cerca de Navidad) y había varios premios asociados con cada número.

El viceministro le ofreció al pueblo francés una alternativa. En lugar de pagar el precio de cada billete de lotería, una persona que tuviera un determinado bono podía acceder a un billete abonando *¡una milésima parte del bono del tesoro francés que tenía en su poder!* Por ejemplo, si una persona con un bono de 100.000 libras quería comprar un billete de lotería, podía aprovechar que era poseedor de ese bono y sólo tendría que invertir 100 libras para comprarlo. Por supuesto, si tenía un bono de 1.000 libras, solamente debía invertir *una libra* para comprar el *mismo* billete.

Pero eso no fue todo. Si el comprador ganaba la lotería con ese número, el gobierno francés le garantizaba que el premio sería exactamente el valor del bono (que en el mercado, en ese momento, estaba ciertamente muy devaluado, porque no se podían cobrar). Además, había un premio extra: el ganador obtendría una suma adicional de 500.000 libras.

Resumiendo: una persona que tenía un bono del tesoro de 100.000 libras (por ejemplo) que *no podía recuperar su dinero porque el gobierno no tenía como pagarlo*, podía comprar un billete de lotería invirtiendo nada más que 100 libras. Si el billete resultaba premiado, el gobierno no solo le pagaba las 100.000 libras (que de otra forma el dueño no tenía forma de recuperar), sino que además le agregaba 500.000 libras.

El viceministro estaba supercontento porque la gente comenzó a comprar bonos nuevamente, ya que además, como accesorio, tenían el incentivo de ganar la lotería. Pero en el camino sucedió algo muy curioso que terminó poniendo al propio gobierno francés en una situación desesperante. Es que el viceministro había hecho muy mal las cuentas.

Antes de avanzar, me gustaría contestar una pregunta que inexorablemente uno debe hacerse: ¿cuánto sería una libra a va-

lores de hoy? O, si usted prefiere, ¿cuánto representarían hoy 500.000 libras? Para tener idea del dinero involucrado, uno tendría que hacer una conversión de la moneda.

Lo notable es que el premio que se ofrecía era de 500.000 libras y yo me imagino que a usted le debe estar pasando lo que me pasó a mí originalmente: ¿libras? ¿En Francia? Sí, aunque parezca 'raro', eran libras y fue en Francia.

De todas formas, independientemente de la denominación, tratemos de transformarlas a valores actuales. Los historiadores tomaron dos caminos que quiero comentar acá. Los resultados difieren sustancialmente, pero sirven para establecer una suerte de 'mínimo' y 'máximo'. Obviamente, ninguno de los dos es perfecto; eso sí: al menos ofrecen una idea de los montos.

La primera forma es elegir el 'patrón oro', y tratar de ver cuánto oro se hubiera podido comprar en aquella época con las 500.000 libras. De acuerdo con los datos de la época, esa cantidad de libras rondaría el equivalente del oro que uno podría comprar hoy con casi 6 millones y medio de dólares.

Otra manera de evaluar el poder adquisitivo de ese medio millón de libras es calcular cuántas horas debería trabajar una persona —en promedio— para llegar a conseguir ese dinero. Una vez establecida esa cantidad de horas, multiplicarlas por el salario promedio actual y averiguar cuántos dólares son. En ese caso, el número es *escandalosamente mayor*, algo así como 121 millones de dólares (ciento veintiún millones). En cualquiera de los dos casos, por defecto o por exceso, es un número descomunal, especialmente si pudieron —como usted verá— repetir el proceso sin ser descubiertos durante dos años.

¿Cómo funcionaba el plan? Acompáñeme por acá y verá lo que pasó. Suponga que dos personas tenían dos bonos de diferentes denominaciones: uno de 100.000 libras y otro de 1.000. El

precio del billete de lotería valía diferente. En el primer caso, el precio era de 100 libras mientras que el segundo, era de una sola libra. Sin embargo, *las chances de ganar la lotería* eran las mismas, y además el gobierno francés agregaba un premio adicional de 500.000 libras, independientemente del valor que había pagado por el billete.

Aquí es donde apareció en escena el famoso Voltaire. En esa época, todavía no tenía ni el prestigio ni el reconocimiento que ganó posteriormente, pero sí tenía múltiples conexiones. Voltaire tuvo la fortuna de encontrarse con un matemático del que terminó siendo su gran amigo. Me refiero al famoso Charles Marie de La Condamine. Este le hizo una observación que terminaría siendo decisiva.

Voy a 'imaginar' un diálogo entre ambos (que contiene la verdadera *trama* de esta historia fascinante): "*Hagamos lo siguiente* —dijo el matemático—. *Tratemos de comprar la mayor cantidad posible de bonos de la menor denominación, o sea, los de 1.000 libras. Por cada uno de ellos, vamos a tener que pagar una libra. Si podemos conseguir suficientes de estos bonos, podremos comprar suficientes billetes de lotería de manera tal de garantizarnos que vamos a poder conseguir el número ganador. Si es así, vamos a recuperar las 1.000 libras del bono* —que sería la parte *menos* importante— *pero vamos a obtener las 500.000 libras que acompañarán el premio. Si repetimos esto durante todas las semanas, vamos a hacer una fortuna. Por supuesto, con estos bonos solamente no va a alcanzar pero tenemos que lograr acumular la mayor cantidad que podamos*".

Y eso hicieron. Por supuesto, tuvieron que sortear algunas dificultades. La primera de ellas era obtener suficientes *notarios* que pudieran certificar las transacciones. No había muchos en esa época y ellos no querían despertar ningún tipo de sospechas.

Por otro lado, como escribí antes, debían contar con suficiente dinero para comprar la cantidad de bonos que necesitaban. Los de 1.000 libras no eran suficientes, tenían que invertir más dinero para adquirir los de denominación más alta. Voltaire era una persona muy conectada y él dijo que se ocuparía de recolectarlo. Naturalmente, las personas más ricas que él podía conseguir querrían una parte del 'botín'. Ese no sería el problema porque como 'casi' podían garantizar que ganarían todas las semanas, el dinero a repartir resultaba obsceno y habría suficiente para todos.

Y lo consiguieron. Digo, comenzaron con la idea y la desarrollaron por exactamente dos años. Voltaire, arrogante como era, no pudo con su 'genio'. Así como sucede en la actualidad, usted habrá visto que hay personas que suelen 'escribir o dejar alguna marca' en los billetes que están en curso. De alguna manera, es como dejar una inscripción que los identifique o que le traiga algún tipo de recuerdo. Voltaire hizo lo mismo. En aras de burlarse del propio gobierno (que ya lo había encarcelado durante once meses), escribía detalles que valoraban la gestión de su matemático amigo (De La Condamine). Tanto hizo que el gobierno los descubrió. Y les hizo juicio tratando de recuperar el dinero. Pero no tuvieron éxito: la asociación de Voltaire con De La Condamine no había cometido ningún ilícito: se habían apegado a las reglas y habían ideado una trama que les permitió enriquecerse… ¡a todos! De hecho, tanto Voltaire como el matemático se hicieron inmensamente ricos y ambos pudieron dedicarse a lo que más les interesaba: uno, a escribir. El otro, a la matemática.

La historia de Voltaire es más conocida, pero De La Condamine también hizo historia con su periplo. Decidió viajar a Sudamérica, más precisamente a Perú, Ecuador y Brasil. Primero, estuvo recorriendo la cordillera de los Andes. Su objetivo era medir la circunferencia de la Tierra. También logró trazar un mapa

del río Amazonas y participó en la definición de lo que habría de significar la unidad de medida de distancia más famosa: un metro. Después, se dedicó al estudio de la quinina, que terminó sirviendo para combatir la malaria; más adelante, intervino también en el desarrollo de la vacuna contra la viruela y descubrimiento del látex.

Tanto Voltaire como De La Condamine terminaron casándose con sus respectivas sobrinas (cada uno con la propia, cada uno con la hija de su propia hermana), pero la parte de 'sociales' me importa un poco menos (o nada).

Para terminar, si está interesado en esta historia y quiere tener más detalles, le sugiero que lea el artículo que publicó Andy Williamson[24] en el sitio http://www.todayifoundout.com/index.php/2013/05/how-voiltaire-made-a-fortune-rigging-the-lottery/

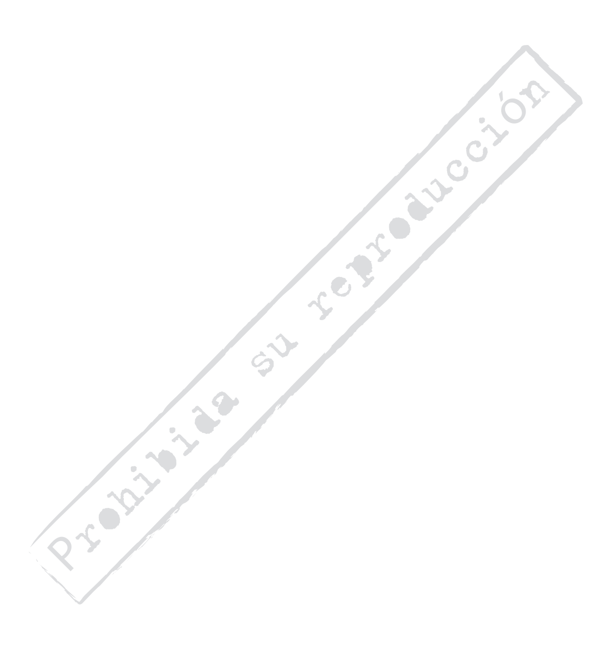
Yo me enteré de esta historia en una de mis últimas visitas a Londres, a principios de agosto de 2018. Obviamente, más allá de mi gratitud a mis colegas ingleses, como mis conocimientos de historia son virtualmente nulos, extraje varios datos de diferentes sitios. Algunos de ellos puede encontrarlos acá:

- https://verne.elpais.com/verne/2017/12/20/articulo/1513764103_684537.html (en español)
- https://www.goodreads.com/book/show/26721330-a-cabinet-of-philosophical-curiosities
- https://www.smithsonianmag.com/smart-news/voltaire-enlightenment-philosopher-and-lottery-scammer-180967265/

---

24. Escritor, arquitecto, pensador, innovador, provocador… *diferente*. De origen escocés, falleció muy joven (a los 40 años, en mayo de 2017), pero sus artículos contienen *siempre* un costado atractivo… al menos para mí.

- https://www.britannica.com/biography/Charles-Marie-de-La-Condamine
- http://www.phfawcettsweb.org/condam.htm
- http://www.bouncing-balls.com/timeline/people/nr_condamine.htm
- https://en.wikipedia.org/wiki/Voltaire
- https://wiki2.org/en/Voltaire



Las confusiones con el azar

Los humanos creemos tener una buena idea de lo que es el azar. Sí, el azar. Sin embargo (y por supuesto que yo estoy tan incluido como usted), tengo múltiples ejemplos para poner a prueba tal convicción.

En lugar de hacer una lista (de los ejemplos), prefiero contar una historia que leí en un libro llamado *The Tiger that Isn't*[25], que en castellano sería (traducción libre mía) “El tigre que no es tal”. Los autores son Michael Blastland y Andrew Dilnot. En alguna parte, antes del prólogo, hay una sugerencia que quisiera extraer. Dice así: “Habría que darle a todo periodista una licencia ‘paga’ para que lea (y relea) *El tigre que no es tal* hasta que lo entienda”. En realidad dice algo ligeramente diferente pero conceptualmente es lo mismo. Y estoy ‘hiperconvencido’ de que es así, pero yo lo ampliaría hasta abarcarnos a todos, no solo a los periodistas, sino a *toda* la sociedad.

Quiero contar entonces el ejemplo que me llamó la atención.

Uno cree que estaría en condiciones de reconocer cuando un acontecimiento sucedió en forma azarosa y, por lo tanto, también cree que estaría en condiciones, frente a un evento, de re-

25. La versión inglesa del libro se llama *The Tiger that Isn't* y se puede bajar *gratuitamente* por internet en https://epdf.tips/the-tiger-that-isnt.html.

conocer cuando hay alguna *causa* que lo determinó. Sentimos una tentación imposible de resistir: buscar un *patrón*, una *razón* o *algo* que lo determinó.

Hay veces, no muchas pero existen varios ejemplos, en donde efectivamente somos capaces de encontrar el 'tal' *patrón subyacente*; pero en la abrumadora mayoría de los casos ¡no es así! Buscamos (y creemos haber encontrado) un *cierto o supuesto orden*, pero por más convencidos que estemos, en general, no es así. Este es el ejemplo que ofrecen los autores.

> Alrededor de la medianoche del 5 de noviembre del año 2003, en las afueras de un pueblito inglés que lleva el nombre de Wishaw, en el oeste de Midlands, una persona tenía in mente 'cometer un crimen', si hacía falta, convencido de que había justificadas razones para hacerlo.
>
> Quienquiera que fuera esta persona, vino con un propósito muy determinado: llegó con el equipo necesario, incluidas unas grandes sogas que decididamente le harían falta.
>
> Unos minutos más tarde, justo en el espacio que había entre los establos y el campo propiamente dicho, había un mástil, o un poste. Todos sabían que había estado allí por más de diez años. Medía un poco más de 23 metros. Después de los primeros intentos para tumbarlo, se tambaleó y después, cuando ya no podía ofrecer más resistencia, cayó estrepitosamente.
>
> Estaba allí con un propósito determinado: emitía señales que servían para ofrecer telefonía celular en la zona. Justamente, cuando llegó al piso, interrumpió las comunicaciones. Habían pasado exactamente treinta minutos después de la medianoche.
>
> Cuando llegó la policía, no pudo encontrar ningún testigo. Quizás tampoco quiso.
>
> A la mañana, cuando operarios de la compañía de telefonía celular intentaban 'reinstalarlo', la gente del lugar se ocupó de que no pu-

> dieran hacerlo. Acusaron a la empresa que los operarios representaban de tratar de invadir la propiedad privada. Desde ese momento, las personas que protestaban se organizaron en diferentes grupos para cubrir las 24 horas. Eso les daría garantía de que ese mástil (o poste) no sería erigido allí nunca más. Y así sucedió. Hasta hoy.
>
> ¿Por qué? Si uno hace 'centro' en el poste, y traza (imaginariamente) un círculo con un radio de alrededor de 500 metros (cinco cuadras), allí vivían alrededor de veinte familias. Justamente, entre los integrantes de esas familias, se habían detectado ***nueve*** casos de personas con cáncer. ¿Cómo explicar tantos casos en un solo lugar si no fuera por los efectos (supuestamente) cancerígenos que se desprendían de las señales que emitía ese mástil?
>
> Los habitantes de la villa podrían tener razón. De hecho, el mástil no fue repuesto, y es muy posible que nunca más sea erigido en ese lugar. Uno podría pensar que si en ese mismo lapso se hubieran cometido nueve crímenes, los lugareños tratarían de buscar ***una causa*** también. Cuando dos situaciones de este tipo suceden, es razonable pensar que ***deben*** que tener alguna relación.

Pero, eso *no siempre es cierto*. Podría ser que quienes vivían (o viven) allí estuvieran equivocados. Podría suceder que dos eventos inusuales que suceden simultáneamente no necesariamente estén vinculados, aunque nos cueste mucho trabajo aceptarlo. ¿De qué otra manera interpretar *tantos casos de cáncer en un lugar tan pequeño* si no fuera porque *tiene* que haber alguna razón que los haya generado? Si no era el mástil, entonces… ¿qué?

Es por eso que Blastland y Dilnot proponen pensar el siguiente ejemplo, y yo se lo propongo a usted.

> Párese en una alfombra, pero una que no sea muy profunda. De todas formas, consiga una aspiradora porque después la va a necesitar. Lleve una lata grande (como las que usa para poner galletitas), pero

en lugar de galletitas llénela con granos de arroz. Quítele la tapa y arroje hacia arriba, hacia el aire, todo el contenido. Trate de vaciar la lata en un solo gesto.

Como se da cuenta, lo que hizo fue crear una distribución 'al azar' de los granos de arroz, que justo cayeron sobre la alfombra en la que usted estaba parada/o. Ahora, preste atención en cómo quedaron esparcidos por el piso. Lo más probable es que no estén distribuidos de modo uniforme. Es posible que haya lugares en donde haya pocos, otros donde haya muchos e incluso puede que haya dos tipos de lugares fácilmente distinguibles: espacios en donde 'casi' no cayó ningún grano y otros en donde se formó una 'pila' con muchos, ¿no es así?

Cuando se produce la aparición de muchos casos de cáncer o cuando emergen concentraciones que parecen (o son) inhabituales, uno —razonablemente— busca una explicación. ¿Por qué no la buscamos con el arroz? Imagine que cada grano de arroz es equivalente a un caso de cáncer que 'toca' a los lugares en donde vivimos.

En todo caso, el ejemplo muestra que abundantes concentraciones en determinadas zonas se producen por razones *puramente aleatorias… ¡al azar!*

En el caso del arroz parece muy atendible y comprensible que el azar funcione de esa forma, pero en el caso del cáncer, ¡no! Los episodios de cáncer requieren una *explicación* mientras que los de arroz, no. Nos cuesta trabajo entender que ambos son subproductos del azar. Lo que sería *verdaderamente extraño* es que al haber arrojado al aire el arroz, se hubiera producido una distribución uniforme. Eso *sí* que sería raro. Lo que sucedió, no lo es. Pero cuando sucede con el cáncer, se nos torna *inaceptable*.

Un minuto y antes de avanzar: esto *no significa* que yo esté

proponiendo en este artículo que cuando (o donde) hay aviones que rocían con sustancias tóxicas determinadas zonas, sustancias que terminan siendo cancerígenas, decía, no propongo que ignoremos o no investiguemos las consecuencias fatales que conllevan esos vuelos. No. No lo interprete así. Lo que *sí* quiero es advertir sobre la tendencia que tenemos los humanos en buscar teorías que 'expliquen todo', y cuando no las encontramos, entonces las buscamos en postes de teléfonos o en algunos episodios místicos. Nada más que eso. El 'azar', nos guste o no, funciona de esa forma.

De la misma forma, con esta analogía no pretendo deducir o concluir equivalencias *morales* entre la distribución de granos de arroz y personas que tienen cáncer. Acépteme que tengo un poco más de sensibilidad como para detectar las diferencias. De hecho, cualquier persona que padezca de cáncer o tenga un familiar, amigo, conocido con una enfermedad terminal, tiene todo el derecho en investigar las potenciales causas, pero la concentración de casos en una determinada zona no habilita a sacar conclusiones típicas de una teoría conspirativa. *Los casos no se distribuirán en forma uniforme*, eso es todo lo que quería advertir.

Por otro lado, que sea 'al azar' no significa que no haya causas. De hecho, la posición del arroz dentro de la lata, si hay viento en el momento en el que la arrojo al aire, la fuerza de la mano que la arroja (y usted agregue acá las que quiera) tienen incidencia, obviamente. Los casos de cáncer, en este sentido, son equivalentes. Lo que sucede es que mientras en el caso del arroz nos parece totalmente natural, cuando sucede con personas y la distribución de una enfermedad, nos resulta desconcertante y, por lo tanto, funcionamos con una vara doble para juzgar o para emitir juicios. De hecho, llamamos 'misteriosa' o

‘sospechosa’ o incluso ‘perversa’ a la distribución. ¿No es raro? Y una propuesta final: deberíamos estar un poco más alerta y esperar que este tipo de patrones aparezcan una y otra vez, y con frecuencia.

La Revolución

Como toda persona, yo tengo un núcleo de curiosidades, de temas que me atrapan. Me doy cuenta de que es tendencioso y arbitrario, pero ¿no nos pasa eso a todos? De todas formas, hay algunos que me interesa entender y estudiar *muy en particular* y después, cuando creo que ya *entiendo un poco más lo que* ***no*** *entiendo*, entonces quiero comunicarlo. Entre todos esos temas, hay un subgrupo particular y son los que contienen algún tipo de dilema ético o bien aquellos en los que no sé bien lo que pienso, no sé qué opinión tengo.

Respecto de los dilemas éticos, entiendo que muchas veces me es muy difícil tomar posición. Una vez que me convenzo de que ya sé por qué elegí una respecto de otra, descubro que me cuesta trabajo seguir otorgándoles el mismo valor de verdad a los argumentos que la sostenían.

Yo sé que este principio es ambiguo, pero no se me ocurre ninguna otra forma de presentarlo que respete mi confusión interna. En todo caso, si pudiera, le propondría que se ponga usted en una situación cualquiera de su vida cotidiana en la cual se vea necesitada/o de tomar una decisión o elegir una posición, y en donde no es claro cuál de las dos 'partes' (por definirlas de alguna forma, o 'distinguirlas' de alguna manera) es ***la*** correcta. No sé

qué le sucede a usted, cuántas veces se ve enfrentado a situaciones de ese tipo, pero yo sí sé que a mí me interesa enfrentarme con ellas y empujarme a esa suerte de 'abismo' en donde *tengo* que optar… En algún sentido, es como estar *viviendo* lo desconocido, *haciendo camino al andar*.

Hay un ejemplo muy típico de esta última época y muy popular también aunque no sé si lo que sigue en este artículo merezca la equiparación, pero lo quiero escribir igual. Suponga que usted debe decidir cómo programar el software de un automóvil que se maneja solo, pero en una situación muy particular. Imagine que súbitamente, cuando el auto va circulando por una avenida o una calle, inesperadamente se le cruza una persona en su trayectoria. Los sensores funcionan 'a pleno' y si el auto pudiera pensar diría: "No hay manera de que yo alcance a frenar antes de embestir al peatón". Allí es donde un humano al volante, pero también el software que viene con el vehículo *que se maneja solo*, invitan a tomar una decisión: o bien el auto puede girar el volante hacia la derecha para evitar el choque o bien hacia la izquierda y chocar contra una pared. En ese instante, esos mismos sensores le advierten que sobre la derecha hay dos personas paradas en la esquina esperando un colectivo y a la izquierda hay una pared, pero también varias personas caminando por esa vereda. ¿Qué hacer? ¿Qué instrucción *darle* al vehículo? ¿Usted qué haría? Digo ¿qué decisión aspira usted que tome el vehículo?

Por ejemplo: ¿deberían importar las edades aproximadas de las personas? ¿O el número de personas? ¿Importa que si la persona que cruza tiene 70 años (como yo) o si entre las dos personas que esperan el colectivo hay un niño? ¿Y si fuera al revés? ¿Si el que cruza imprevistamente es un niño mientras que las dos personas que esperan el colectivo tienen casi 70 años cada uno? ¿Qué debería hacer el automóvil: matar a un humano o a dos?

¿O debería tener en cuenta las edades? Y naturalmente, lo mismo con las personas que están circulando en la vereda opuesta[26].

Como usted advierte, no hay UNA respuesta correcta y otra (u otras) incorrectas, pero lo que está claro también es que ALGUNA respuesta, ALGUNA decisión hay que tomar. Hay que programar el software que llevará el automóvil. Además, le sugiero que piense también que *no tomar ninguna decisión ES tomar una decisión*.

Por otro lado, cualquiera sea la determinación final, ¿quién va a decidir? ¿Los fabricantes del automóvil? ¿El conductor del vehículo? ¿Lo legislará el congreso, con una ley?

Otra pregunta podría ser: ¿habrá que ubicar algún dispositivo que permita que el dueño del automóvil tome esa decisión cada día que maneja? Digo esto porque otra opción podría ser "matarme yo, el conductor, o la persona que conduce", estrellándose por ejemplo contra un árbol o una pared en lugar de atropellar a cualquier otro. Ahora bien, ¿esta decisión la tomaría también si usted llevara algún acompañante en el auto? ¿Y si estuviera su hija? ¿O su madre? ¿No habría que *regular desde el Estado* qué deberíamos hacer como sociedad? ¿O le vamos a dejar ese lugar que deberían ocupar los legisladores a las compañías que fabrican automotores? Pregunto esto porque ciertamente en la Argentina puede que como sociedad tengamos una preferencia diferente que la sociedad *griega* o *portuguesa* o *irlandesa*, por poner algunos ejemplos.

En fin: creo que se entiende *bien* en estos casos por qué no sé qué es lo que pienso, y no sé si usted tiene (o tendría) los mismos problemas que yo. Pero esa es la sociedad en la que estamos vi-

26. Y estoy seguro de que acá mismo caben muchísimas otras opciones que usted (u otras personas) podrían agregar.

viendo y son temas que más allá de las urgencias (no parece ser *muy* urgente tener que tomar una decisión de este tipo ahora), en *algún momento* tendremos que hacerlo. Estamos mucho más cerca de lo que parece, si no es que ya es demasiado tarde… pero ese es otro debate.

¿Qué me motivó a presentar este problema aquí y ahora? Hace poco tiempo, en una situación que es muchísimo más *banal* que la anterior, me siento en una suerte de encrucijada: ¡no sé bien lo que pienso! De a ratos me parece claro que una de las opciones es la que me deja más satisfecho y me siento envalentonado para poder defenderla ante cualquier otra/o que piense diferente. Pero después, con el intento (no siempre exitoso) de poder ponerme en el *lugar de la otra persona*, cuando leo otras opiniones o escucho otras discusiones, cuando tengo más tiempo para pensar o se me ocurre alguna otra idea, voy mutando, saltando de un lado a otro, y busco, si existiera, alguna posición intermedia.

Usted verá que, en el caso que le voy a presentar ahora, *sí* hay posiciones intermedias y no sé siquiera si estoy de acuerdo conmigo mismo, y siento que comparar ambas situaciones es un error. Pero bueno, lo escribo igual. Acá voy.

La historia es así. Pablo Prigioni, uno de los jugadores argentinos de básquet integrante de la famosa Generación Dorada, es ahora ayudante técnico de uno de los equipos de la NBA. Está trabajando en el *otro* equipo de Nueva York, el que tiene su base en Brooklyn. Es un equipo que hasta hace poquito tiempo jugaba en Nueva Jersey, del otro lado del río Hudson pero que en el año 2014 se mudó a Brooklyn, y se convirtió en Brooklyn Nets.

Digo 'el otro equipo', porque el más famoso es el que juega de local desde que se fundó, nada menos que en el Madison Square Garden: los New York Knicks. Pero bueno, me desvié. Prigioni está recorriendo su primer año como entrenador después de ha-

ber abandonado la práctica activa del juego 'casi' al mismo tiempo que Manu Ginóbili y el Chapu Nocioni. Sobre finales de octubre de 2018, Pablo me envió un artículo 'periodístico' que había sido publicado en Los Ángeles, pero que ya tenía tracción en todo Estados Unidos: la sociedad que habían constituido 'el otro' equipo de Los Ángeles (Los Angeles Clippers) —los más famosos mundialmente son Los Angeles Lakers— y una empresa de software muy conocida en el ambiente del básquet: Second Spectrum.

La NBA tiene 29 estadios en donde se juegan sus respectivos partidos. Esas 29 canchas tienen instaladas seis cámaras en el techo, que van registrando (y almacenando) *todo* lo que sucede en la cancha. Es decir, registra *todos* los movimientos de los diez jugadores, los tres árbitros y la pelota. Por un momento, me voy a olvidar de los árbitros y solamente me voy a restringir a los once 'puntos': los diez jugadores y la pelota. Piénselo así: "¡Cada cámara saca 25 fotos *por segundo* de esos once puntos!".

Eso significa que *por minuto* hay un registro de 16.500 fotos de lo que sucede en la cancha.

TODA esa información es almacenada y permite (entre otras cosas) poder contestar algunas preguntas, desde las más obvias hasta las más complejas.

Si sigue leyendo, verá que a continuación voy a exhibir una *muestra sencilla y extremadamente breve* de las que se me ocurrieron a mí.

Tomemos un jugador cualquiera que esté participando en la NBA, digamos LeBron James. Voy a suponer que LeBron tiró al aro en un momento del segundo tiempo cuando estaban jugando contra Los Angeles Clippers y faltaba poco tiempo para que terminara el partido.

Los datos acumulados durante *toda* la temporada hasta ese momento permitirían contestar estas preguntas:

- ¿A qué distancia estaba el rival más cercano a LeBron en el momento en el que tiró?
- ¿Cuántos de esos tiros tomó LeBron cuando faltaban cinco minutos para terminar el partido en todos los otros partidos que jugó este año?
- ¿Y en los que jugó en su vida?
- ¿Cuántos de esos tiros embocó?
- ¿Cuántas veces en esa misma situación le pasó la pelota a un compañero?
- ¿Qué porcentaje de veces tiró comparado con las veces que la pasó?
- De las veces que tiró, ¿cuál fue el *pico* de elevación de la pelota en cada uno de ellos?
- ¿Importó la altura del rival que tuvo adelante para que optara 'pasarla o tirar'?
- ¿Qué porcentaje convirtió?
- ¿Cuál fue la mayor altura que tuvo que superar teniendo en cuenta el brazo estirado del rival que tuvo enfrente?
- ¿Importó en qué lugar de la cancha estaba LeBron, si fue a la izquierda, a la derecha o más cerca del centro?
- ¿Cómo era la distribución de sus compañeros en el momento que estaba a punto de tirar?
- ¿Qué porcentaje de aciertos tuvo LeBron en todos los partidos anteriores que jugó (frente a ese equipo rival y/o a los jugadores que tuvo enfrente)?
- ¿Cómo hubiera variado el porcentaje de aciertos si LeBron se corría ligeramente, digamos cinco centímetros, hacia su derecha? ¿Y si iba hacia su izquierda o hacia adelante? ¿En cuánto hubiera incidido su porcentaje de aciertos?
- Puesto en otros términos, ¿qué porcentaje de aciertos tendrían los compañeros que lo rodeaban en ese mo-

mento, si él les hubiera pasado la pelota en lugar de tomar el tiro?

Como usted advierte, las preguntas son 'casi' interminables y, posiblemente, la mayor parte de las respuestas sean de poca o *cero* utilidad. Pero lo impactante es que *los datos existen* y son *accesibles*. Y virtualmente no requieren de ningún esfuerzo humano: no hay que 'tipear para ingresar los datos' o 'tipear para extraerlos': las máquinas *hacen* todo.

Estos datos son distribuidos por la NBA a *todos* sus equipos. Ninguno tiene ventaja sobre otro. Es cierto que hay algunos equipos que *pagan un dinero extra* para tener acceso a mayor información, pero eso es —en este contexto— un detalle menor.

Quiero hacer una pausa: si usted llegó hasta acá, debe estar pensando: ¿Y dónde está la 'revolución'? O, si usted prefiere, ¿dónde está el dilema que cuesta *tanto* decidir o resolver? De hecho, estos datos existen desde hace casi un lustro. Téngame un instante de paciencia y ya verá.

La compañía que recolecta todos esos datos se llama Second Spectrum. Hace no mucho tiempo, a principios del año 2015, escuché una charla TED[27] que dio su presidente, Rajiv Maheswaran: "La matemática detrás de los movimientos más salvajes en el básquet". Hay una versión en español, de la charla de manera que si le interesa el tema, le sugiero que no se la pierda.

Para hacer todo un poco más sencillo: sígame en lo que explico a continuación y verá que es un aspecto muy interesante. Piense que cada vez que una de las cámaras instaladas en el techo saca una foto, está registrando la posición TRIDIMENSIONAL de

---

27. https://www.ted.com/talks/rajiv_maheswaran_the_math_behind_basketball_s_wildest_moves

los diez jugadores y la pelota. En lugar de poner jugadores y pelota, reemplácelos por *puntos*. Es decir, la foto permite *distribuir* *ONCE* '*puntitos*' dentro de una caja de zapatos. ¿Por qué? Es que la cancha no es solamente *bidimensional*, no es solamente el *piso*. Para que todo este análisis tenga sentido, es esencial tener en cuenta las alturas, ya que hay un aro y no todos los jugadores miden lo mismo.

En algún sentido, esos once puntitos están ubicados dentro de esa 'caja de zapatos' en la que se convierte la cancha *prolongada hacia arriba*, como si hubiera en alguna parte un 'techo'. Esa altura se refiere no solo a la altura de los jugadores, sino también a los brazos extendidos y saltando, a la posición del aro y de la pelota (que obviamente viaja por el aire), etc. Encima de todo, ¡esos once puntitos se mueven! Van generando una especie de película. El programa que diseñó Second Spectrum, almacena las posiciones de esos once puntitos y permite describir las trayectorias de todos ellos a medida que se está jugando el partido y analizar las 'relaciones' que hay entre esos 'puntitos', es decir, cómo incide el movimiento de cada uno sobre el de los otros. Se trata *no solo de detectar y guardar dónde estuvo cada uno (de esos puntos) sino de estudiar las 'relaciones' que hubo (y hay) entre cada uno de ellos*. Ser capaz de *descubrir* qué movimientos de algunos puntitos generan movimientos de otros, es el atractivo de este particular juego. Y eso ocurre en un tiempo determinado y con reglas bien escritas: las 'reglas del juego'.

A esta altura creo que usted y yo estamos de acuerdo en que parece ser que tenemos la tecnología para *almacenar todos esos datos*. Ahora bien, las preguntas empiezan a llegar por otro lado: ¿para qué me sirve guardar toda esa información? ¿Qué hago con ella? ¿Cuáles son las *verdaderas* preguntas que yo querría poder

contestar? ¿Quién las formula? ¿Cuáles son las preguntas relevantes, las que *sí* importa contestar?

Una vez, mi querido amigo y matemático Carlos Sarraute me dijo: "Es como entrar en una mina de oro en donde hay una montaña enorme de 'piedritas'... Uno *sabe* que entre esas piedritas hay algunas, muy pocas, que son 'pepitas'". Esas son las 'pepitas de oro'. Todo bien pero, ¿cuáles son?, ¿dónde están?, ¿cómo las distingo de las piedritas comunes que no sirven para nada y solo están allí para 'hacer ruido'?

Este es una situación bien típica, pero me interesa hacer la distinción: en la vida, uno suele tener preguntas y la dificultad reside en encontrar las respuestas. En este caso, si un equipo fuera capaz de encontrar *alguna* pregunta que otro no supo formular, buscar y encontrar la respuesta no debería ser la parte más difícil. Aquí los roles están invertidos: la dificultad es *qué preguntar* en lugar de buscar *qué contestar*.

A este punto quería llegar, por eso mi interés en titular este artículo "La Revolución". La sociedad entre Ballmer (Los Angeles Clippers) y Rajiv Maheswaran (Second Spectrum) permite que ahora, quienes estén mirando un partido cualquiera de los Clippers, puedan 'verlo' usando esos mismos datos *¡en tiempo real!*[28] Es decir, usted puede estar hoy sentado en la cancha con su teléfono celular o su tableta y, usando la aplicación oficial de Los Angeles Clippers (una app como las millones que hay en cualquiera de los sistemas operativos, tanto de Apple o de Android), y seleccione entre tres posibles MODOS.

Un modo es el de 'modo jugador', en donde el espectador

28. Si bien escribo 'tiempo real', en la práctica por ahora hay una demora de *dos minutos*, pero tanto Ballmer como Maheswaran sostienen que en poco tiempo la reducirán a *diez segundos*.

(usted, yo) puede 'ver' en su pantalla, arriba de cada jugador, no solo su nombre sino un 'numerito' que va mutando a medida que el jugador se va moviendo por la cancha. Es decir, en la misma pantalla en donde usted está mirando el partido, aparecen todos los jugadores, los cuatro compañeros (de quien 'lleva' la pelota) y los cinco rivales, y el 'numerito' que acompaña el nombre va cambiando porque indica un porcentaje. Ese porcentaje marca 'en tiempo real' qué probabilidad de acierto habría si el jugador que lleva la pelota *tirara al aro desde allí*, desde la posición en donde se encuentra. Es por eso que ese 'numerito' se va modificando, es dinámico: como mide la probabilidad de lo que sucedería si tirara desde allí, si *se corriera* o *se moviera*, entonces, es natural esperar que el número cambie o se modifique.

De la misma forma, y simultáneamente, los numeritos encima de los compañeros y rivales indican qué le convendría hacer al jugador que conduce el balón. ¿Le conviene darle la pelota a alguno de sus compañeros —que quizás tengan mejor porcentaje que él—, o bien le conviene seguir corriendo con la pelota hacia delante o hacia alguno de los dos costados? Como el porcentaje también se modifica teniendo en cuenta al rival que está enfrentando al que lleva la pelota, intentar cambiar de defensor es una estrategia *muy utilizada* en el básquet. Por lo tanto, los numeritos cambian en función de múltiples factores, los jugadores *propios* y los de la *oposición*.

Es decir, el programa le advierte a usted qué probabilidad hay de que el rival pueda 'evitar' que usted emboque, pero que si usted le pasara la pelota a algún otro compañero, el rival que lo está enfrentando a él, tiene menos posibilidades de 'defenderlo' que el que lo 'defiende' a usted. También le sugiere que *intente cambiar de rival* o de aprovechar que alguno de sus compañeros está siendo defendido por un jugador que 'históricamente no lo puede detener'.

Esos números aparecen en 'verde' o en 'rojo': si está en verde, usted está mejor que su compañero; o al revés, si es que aparece escrito en rojo. Y lo mismo sucede con los rivales, de acuerdo con su capacidad para defender.

Esta descripción se resuelve muchísimo más rápido si uno 'mira' 30 segundos de un partido[29]. Si usted observa el primer video de 30 segundos, entenderá mucho más rápido de qué estoy hablando. La perspectiva que ofrece el programa es tener no solo los porcentajes (que usé como ejemplo), sino también los diferentes ángulos posibles. En algún sentido, usted, yo, el espectador, se transforma en el director de cámaras. Usted decide desde qué lugar quiere ver el partido, sentado en la primera fila, detrás de alguno de los aros, en algún ángulo o desde alguno de los tableros. Por otro lado, también hay un 'modo director técnico' (o *coach*), que permite observar 'en tiempo real' la jugada que diseñó el técnico de su equipo. La lista podría seguir, pero creo que a esta altura ya es más que suficiente.

Como usted se da cuenta, llegamos al punto en el que el partido se transforma en un 'videojuego'. O si usted prefiere, nos estamos acercando a la instancia en la cual *la vida toda* se está transformando en una suerte de videojuego.

Y ahora sí puedo hacer la pregunta que quiero formular desde que empecé a escribir este texto: ¿queremos que esto suceda?

Hagamos un pacto por un instante y supongamos que en algún momento se 'hará justicia' y habrá *equidistribución* de la riqueza en el mundo. Y no me refiero solamente a la riqueza material, sino también a la riqueza intelectual. En ese momento, TODOS deberíamos tener acceso al mismo tipo de información, educación, salud, tecnología… Dicho todo esto, usted…

---

29. En esta página hay varios videos: https://www.clipperscourtvision.com/

sí, usted… ¿querría ver un partido así? ¿Preferiría usar toda esta parafernalia tecnológica o preferiría ver una competencia como hemos hecho hasta el día de hoy?

Naturalmente, si la pregunta ofrece *la opción*, cada uno tendrá el derecho de elegir y listo. Pero si en algún momento *no hay más opción* y alguno (o algunos) terminaron eligiendo por nosotros, ¿entonces? ¿Queremos eso? ¿Estamos mejor ahora o estamos peor?

Mi tentación es *siempre decir que estamos mejor*, o más bien, yo estoy 'convencido' de que estamos mejor[30], pero entiendo que hay mucha gente que no quiere este tipo de desarrollo, que lo siente como avasallante y, sobre todo, que le quita —en este caso al deporte— la imprevisibilidad, el error, la fragilidad de tener que optar uno sin la asistencia de la multiplicidad de información que hoy en día se nos hace cada vez más accesible.

¿Habrá alguna posición que sea la acertada y otra la equivocada? ¿Quién se pondría en el papel de 'juez supremo' para tomar una decisión final?

Está claro que esa persona no seré ni sería nunca yo. Todo lo que hago es presentar lo que hoy ya existe. Y lo que usted leyó es solo una de esas fotos, de las cuales hay casi tres millones por partido. ¿Quién tiene razón? ¿Qué es mejor? O peor aun, ¿tiene siquiera sentido mi pregunta? ¿O todo esto ya está decidido y nosotros somos simples espectadores *creyendo* que nos dejan ser los directores de cámara? ¿Usted qué piensa?

Subnota

Los Angeles Clippers, como todas las franquicias de los deportes profesionales norteamericanos (salvo *una*), tienen un dueño

30. Siempre y cuando *todos* tengamos garantizados los mismos derechos.

(o dueños). Si sumamos los equipos que compiten en los cuatro deportes más importantes (fútbol, básquet, béisbol y hockey), hay en total 123. De estos 123, como escribí antes, hay *solamente* ***uno*** que funciona como los equipos en la Argentina: los socios son los 'dueños'. Ese equipo tiene su estadio (y su vida) en una pequeña ciudad de Wisconsin, Green Bay, y se llama (como era esperable) Green Bay Packers, es decir, "Los empacadores de Bahía Verde", algo así como si fuera Bahía Blanca.

Por ese *segundo* equipo de Los Ángeles, Los Angeles Clippers, su dueño, Steve Ballmer, pagó dos mil millones de dólares. Lo quiero escribir de nuevo porque parece imposible de creer, pero es así: 2.000.000.000 de dólares. Eso sucedió en el año 2014. Hasta allí, Ballmer había sido el CEO de Microsoft (¿le suena?), compañía en la que ingresó en el año 1980 como empleado. Es fácil imaginar entonces que además de ser un multimillonario, es una persona muy interesada en la tecnología, y más específicamente en lo que se conoce con el nombre de Big Data.

Big Data es la forma de llamar a la acumulación de información que uno recoge en algún campo particular, y aprovecha para hacerlo la imponente capacidad de memoria que tenemos disponibles hoy. Para entender lo que sucede, piense cuánta memoria tiene hoy en su computadora o en su teléfono celular. Cada vez más aumenta la posibilidad de guardar más datos en lugares cada vez más pequeños; por otro lado, la velocidad de acceso a esos datos se ha incrementado en forma exponencial. Es una extraordinaria combinación: guardamos cada vez más (por no decir que ahora podemos guardar 'casi' todo) y tenemos la posibilidad de buscar —y encontrar— lo que necesitamos a una velocidad increíble de imaginar hace solo algunos años.

El problema entonces reside en lo siguiente: de todos estos datos que tenemos y que hemos acumulado/guardado, ¿cuáles

son los valiosos?, ¿cuáles son los que nos tendrían que interesar? Es decir, tenemos todos los ingredientes, sabemos que *están en alguna parte* dentro de esa 'pila', sí, pero ¿cuáles son y dónde están? Ese es el *gran problema*.

El artículo tiene que ver con el básquet, pero siéntase libre en extrapolarlo a cualquier deporte, si es profesional, mejor, sobre todo si hay dinero en juego. Si no, no interesa tanto.

Subnota 2

Toda esta revolución es parte de lo que se llama 'realidad aumentada' (*augmented reality*), 'máquinas que aprenden' (*machine learning*), 'inteligencia artificial' (*artificial intelligence*).

Apéndice final

Al llegar a este punto, Carlos D'Andrea me ofreció un punto de vista que *necesito* incorporar al texto. Cuando digo que lo *necesito* es porque, al vivir en mi propio mundo (como nos suele pasar a muchas personas), y por más esfuerzos que haga, advierto que termino ignorando las opiniones de quienes me rodean o, en todo caso, adjudicándoles el 'peso' que deberían tener. Está claro que no podría incluir en un libro todo el debate de ideas que generaría cualquier postura, posición u opinión, pero lo que *no puedo hacer*, es tener en mis manos la opinión de alguien que quiero y valoro mucho, y no incluirla acá. Creo que es la mejor manera de invitarla/o a usted a que haga lo mismo. Si eso sucede, si esta nota le sirve como 'disparadora' de algo que no pensó nunca antes o bien le despierta sentimientos encontrados, yo me sentiré realmente satisfecho. Esto fue lo que me escribió él:

Adrián,

Tu artículo comienza con algo interesante, que es el tema de las decisiones que tendrá que tomar la inteligencia artificial cuando se trate de vehículos conducidos automáticamente y luego se pasa (y acaba) con otro tema que también es interesante pero que no son realmente la misma cosa, o si lo son, no se refleja en tus conclusiones porque "te olvidás" del principio.

Mi opinión personal: me parece irracional que nos estemos planteando el dilema ético de las máquinas (que van a tener que decidir esto) cuando nunca nos lo planteamos como seres humanos que somos los que conducimos y los que producimos accidentes desde que se inventó el coche. ¿Por qué nos podemos permitir "no pensar en eso" y dejar luego todo librado al "reaccioné en frío" y quedarnos tan tranquilos, y no hacer lo mismo con las máquinas? ¿Por qué vamos a ser más estrictos con las máquinas que con lo que somos nosotros mismos?

Y lo otro, es un deporte, que mueve mucho dinero eso sí, pero es un deporte. La gran mayoría de los deportes fue "optimizando" los recursos humanos que tiene a medida que pasa el tiempo y la tecnología está disponible (en ciclismo, montañismo, tenis, natación, el equipamiento ahora es mucho más dinámico que antes y está diseñado a que la persona "rinda" de la mejor manera posible). Y ahora le toca al basketball. Eso seguramente le quitará algo de "azar" al juego, como seguramente ahora el tenis tiene menos de "azar" en lo que respecta de las posiciones de las/los jugadoras/es en el ranking, pero dudo que acabe por hacerlo desaparecer. Y si así fuera, tampoco es el fin del mundo. Es un deporte más de los muchos que hay, ¿no?

Un *placer* egoísta

Lo que sigue es un reconocimiento a un matemático japonés, Nob Yoshigahara. Más que matemático, Yoshigahara fue un destacadísimo inventor de 'entretenimientos para pensar'. Yo sé que si escribiera la palabra *puzzle*, resolvería la disyuntiva que tengo, ya que no sé cómo definir lo que hacía. No conozco suficientemente su trayectoria, que todos juzgan extraordinaria, pero por otro lado me cuesta mucho trabajo 'encasillarlo' o 'etiquetarlo' como un diseñador de puzzles. ¿Se imagina si uno fuera *catalogado* como 'puzzlista'? No sé, me hace sentir incómodo.

Pero volviendo a lo que quiero presentar acá, intento hacer justicia con el 'origen' del problema. Mi amigo Alex Bellos, el extraordinario matemático británico, dedicado a la matemática recreativa, uno de los más importantes del mundo, ha escrito varios libros. Uno de ellos se llama *Can You Solve My Problems?* (*¿Puede resolver mis problemas usted?*)[31].

31. "¿Puede resolver mis problemas usted?" es una traducción libre mía. No sé si el libro está publicado en español, pero debiera. Más aún: el título es más amplio, se llama: *Can You Solve My Problems?: Ingenious, Perplexing, and Totally Satisfying Math and Logic Puzzles*. El problema de este capítulo es el *primer* puzzle de ese libro. Por lo tanto, el mérito/crédito les corresponde a ambos: Nob Yoshigahara, por ser el autor intelectual, y a Alex Bellos,

Una vez más, quisiera pedirle algo: *por favor, ¡no lea la solución!* En esta oportunidad, más que nunca, verá que si lo hace, se habrá 'robado' a usted misma/o de la chance de DISFRUTAR un logro.

Me explico: como se puede imaginar, resolver o no un problema de estas características es *totalmente irrelevante*. Su vida no cambiará en *nada*… No, perdón, sí va a cambiar, pero no le servirá a nadie más que a usted. ¿Se lo podrá permitir? ¿Podrá hacer algo que no 'sirva' para nadie más que para usted misma/o? Es por eso que lo llamé "Un placer egoísta".

Verá que el problema es 'hipersencillo', muy fácil de entender. Si observa la Figura 1, advertirá inmediatamente que hay círculo al que le falta *el número que debiera estar allí*. En su lugar, hay un signo de pregunta.

Como se imagina, el objetivo es justamente ese: elegir *alguna regla* que sigan *todos* los otros números, de manera tal que si usted ubica 'el número que usted cree que debería ir allí', mantendría la elegancia del problema y *respetaría* la regla que usted quiere convencerse que dio origen a todos los otros (números).

En general, en este tipo de problemas suele suceder que haya más de una solución, pero usted advertirá —casi— inmediatamente que se le va a ocurrir *una* en particular… Ese será un momento que le generará un alivio profundo. Pero, claro, no todo es tan fácil.

Es muy posible que lo que *usted cree* que es una potencial solución del problema, en realidad… ¡no lo es!

Al menos, es lo que nos ha pasado a todos los que yo conozco que hemos intentado hacerlo. Como hay un dato que no va a

porque sin él es muy poco probable que yo hubiera entrado en contacto con el texto.

‘cerrar’, usted va a sospechar que hay un *error* en el tipeo de un número, un error de la editorial. Me anticipo a decirle que *ese* número es el 7. Sin embargo, ¡no es así! El número 7 que figura allí, ESTÁ BIEN puesto en ese lugar.

No hablo más, o mejor dicho, no escribo una palabra más. Este es el puzzle de Yoshigahara.

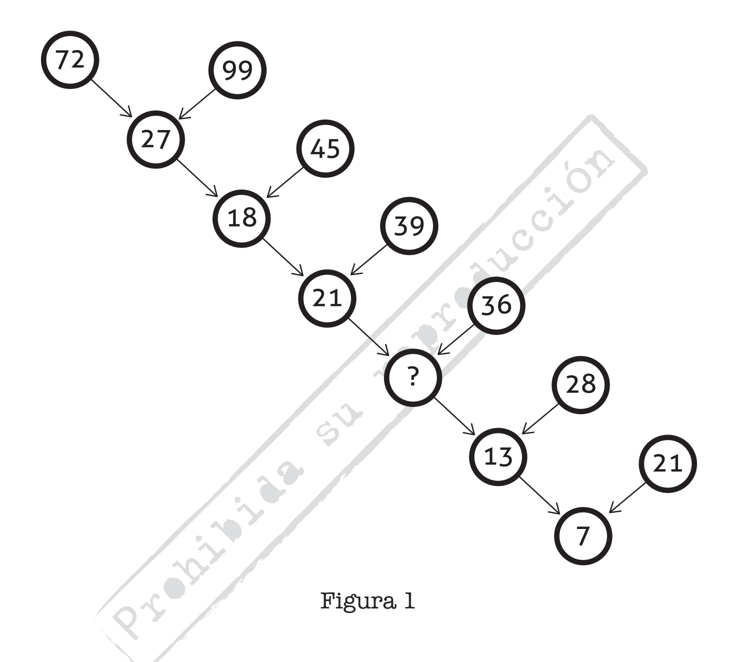


Figura 1

¿Qué número *tendría* que ir en donde está el *signo de pregunta*?

Una manera de pensar el problema y tratar de resolverlo

No sé lo que le pasó a usted. Créame que me encantaría ‘interactuar’ para aprender de la forma de pensar que tienen otras personas, pero como no puedo, debo *intuir* lo que *pudo haberle pasado*, teniendo en cuenta los datos que fui recogien-

do a medida que se lo fui planteando a diferentes personas y audiencias.

Uno se fija en los números 72 y 99. De cada uno de los círculos que los contienen, sale una flecha. Ambas flechas apuntan al círculo que contiene al 27.

Lo que uno querría hacer es tratar de descubrir *qué operación* los relacionará (o *podría* relacionarlos). Y comienza a la búsqueda (que le dejo a usted).

Hay un momento en el que en los variados y múltiples (o no) intentos, se pregunta: ¿si los resto qué pasa? Y sí, pasa que

¡99 – 72 = 27!

Entonces, yo me apuré y traté de ir inmediatamente al siguiente par de flechas para ver qué pasaba: el 45 y el 27 apuntan al 18. Si yo repitiera la misma conducta, los resto y una vez más, ¡pasa lo que yo quiero que pase!:

¡¡¡45 – 27 = 18!!!

Uy, vengo bien. Sigo… Ahora, las dos flechas que siguen (39 y 18) apuntan al 21. Resto:

39 – 18 = 21

Y una vez más, obtengo lo que quería. Ahora, voy ‘barranca abajo’… ¿Qué número tendré que poner en el lugar del signo de interrogación? Como las flechas del 36 y 21 apuntan a ese signo, los resto, y me da **15**.

Pero no me alcanza con esto. ¿Por qué? Es que debo poner el 15 allí, y necesito comprobar ‘la regla’ que usé hasta acá: tendría

que restar el 28 (que estaba) y el 15 (que acabo de poner) y ver qué sucede. Lo intento y… ¡bingo! ¡Sigue pasando!

¡28 – 15 = 13!

Esto es lo que necesitaba para estar *convencido* de que el 15 es el número que buscaba. Me falta *un solo paso*: como las flechas que me faltan corroborar salen del 13 y del 21, resto y me tiene (ME TENDRÍA) que dar 7… Pero sucede algo frustrante: 21 – 13 = 8 y NO 7, como debería.

Vuelvo para atrás con todo, reviso todas las cuentas, y ¡todo funciona bien! O mejor dicho, funcionaba bien *hasta acá*.

El número que falta TIENE que ser 15… Si no lo es, significa que hay un *error* en alguna parte. ¡El 7 tiene que estar mal! Debe ser un *typo*, un 'error al tipear'. Debería avisarle a la gente de Sudamericana, para que cambien ese dato en la próxima edición, de manera tal que la gente no se vuelva loca: ha resuelto el puzzle (como yo) y sin embargo, le dicen que está mal.

Uno piensa: ¡menos mal que me di cuenta!

Sin embargo, *este* era el momento al que quería llegar, porque el autor (yo) le advirtió que el número 7 está bien… ¿Entonces?

Y acá es donde llega un breve instante de frustración… ¿Cómo puede ser? ¿*TODO* anda bien y sin embargo el 7 TAMBIÉN está bien?

Aquí comienza otra instancia en la cual yo preferiría *no escribir una palabra más*. Créame: vale la pena que usted piense el problema nuevamente. Sí, que piense que puede haber *alguna forma de rellenar el círculo* en donde figura el signo de interrogación, de manera tal que *todo* tenga sentido, y el número 7 sea el número adecuado.

¿Qué hacer ahora? Empezar de nuevo por el 99 y el 72, arriba de todo. ¿Cómo puede ser que si la *resta* de 99 menos 72 resulta ser 27…? O dicho de otra manera: ¿qué otra operación entre el 99 y el 72 tendré que usar para obtener 27 si no es restar?

Justamente de eso se trata. ¿Quiere pensar usted?

Fíjese que si *suma* los dígitos del 72 y 99, obtiene… ¡27! Es decir,

$$7 + 2 + 9 + 9 = 27$$

¿Será *eso* lo que habrá que hacer? Veamos

Si sumo los dígitos de 27 y 45, obtengo 18, ya que

$$2 + 7 + 4 + 5 = 18$$

Ahora me entusiasmé otra vez. Sumo los dígitos de 18 y 39:

$$1 + 8 + 3 + 9 = 21$$

¿Cómo seguimos? Bueno, es 'fácil', ¿no? Ahora que uno tiene una *nueva conjetura* sobre lo que *podría* estar pasando, se trata de intentar comprobarla. Veamos: ¿qué número tendría que ir en lugar del signo de pregunta? La suma de los dígitos de 36 y 21.

$$3 + 6 + 2 + 1 = 12$$

Y luego, si allí fuera un número 12, entonces, como

$1 + 2 + 2 + 8 = 13$… ¡que es lo que tenía que pasar!

Pero un momento: ahora, si uno *suma*

1 + 3 + 2 + 1 (que es la suma de los dígitos de 13 y 21), obtiene ¡7!

¡Y listo!

Lo notable de este puzzle, es que Yoshigahara logró que cada uno de nosotros fuera por una calle que conducía *inexorablemente* hacia un resultado que *uno creía* que era correcto. En realidad, no hay nada que diga que *no es correcto*, solo que uno quiere que todo pegue, que todo funcione. Si uno aceptara la solución de restar, como hice al principio, *también* tendría que aceptar que *hay un error en el tipeo* y que el número 7 no corresponde. Es más fácil convencerse de que hay un error que de creer que uno hizo algo equivocado.

Para terminar: acá no hay nada que no sea *satisfacción* y *placer* puro. Y nada más. Si usted se satisface con esto, ¡perfecto! Si no, todo esto le habrá resultado irrelevante.

¿Es un *sorteo* en serio?

Corría el mes de abril del año 2019. Marianela es una amiga mía abogada. En realidad, es doctora en Derecho, lo cual es un peldaño *superior* dentro de la jerarquía universitaria. Me dijo que estaba con un grupo de personas de la Facultad de Derecho, y que querían disipar una duda. Para respetar la privacidad de las personas involucradas, voy a omitir los nombres. Acá voy.

> Adrián, en la Capital Federal (de la República Argentina), hay 12 juzgados federales. Cada vez que se recibe una causa, se produce un ‘sorteo’ entre los 12 para determinar cuál de ellos se ocupará de él y, por lo tanto, cuál será el juez que tenga que fallar.
>
> Hay una empresa que tiene acusaciones de diferente tipo. La justicia ha sorteado 10 causas en los últimos tres años. Lo notable es que de esas 10, ¡nueve ‘cayeron’ en el juzgado federal número 12! Solamente una será tratada por otro juzgado.
>
> Tengo una pregunta: ¿cuál es la probabilidad que eso suceda? Es decir, si el sorteo es lo que debe ser (aleatorio), ¿cuál es la probabilidad de que nueve de las 10 hayan caído en un juzgado en particular?
>
> Nosotras imaginamos que esa probabilidad es muy pequeña, pero… ¿cuán pequeña?

Y me dejó con el problema.

¿No tiene ganas de pensar por su cuenta y ver si coincidimos en la respuesta?[32]

Solución

Hay 12 juzgados y 10 casos diferentes.

a) Por un lado, quiero *contar* de cuántas formas posibles puede terminar un sorteo de estas características. Es decir, si el sorteo fuera lo que debe, verdaderamente *al azar*, ¿cuántos posibles resultados hay? (le propongo que haga la cuenta usted).

Sigo yo: en total hay

61.917.364.224 posibles resultados

Dicho de otra manera, son 61 mil 917 millones, 364 mil 224 posibilidades (luego detallo de dónde aparece este número).

b) Por otro lado, quiero *contar* cuántas posibilidades hay de que *nueve* de las diez causas resulten adjudicadas al juzgado número 12 y que la restante resulte sorteada en alguno de los otros. Una vez más, ¿no quiere pensar usted?

Sigo. Hay solamente 110 posibilidades de que eso suceda y, otra vez, luego explicaré cómo llegué a ese número.

---

32. La respuesta sería diferente si uno *no supiera* que el sorteo 'favoreció' al juzgado número 12. Es decir, la probabilidad de que haya nueve causas que caigan en *un juzgado* ***específico*** y una sola en algún otro *es* ***mayor*** *que la probabilidad de que nueve caigan en un juzgado cualquiera (entre los 12) y la restante en cualquier otro.*

c) Si estos dos números son los correctos, *¿cómo se calcula la probabilidad que busco?*

Se calcula *dividiendo* los casos 'favorables' (110) por los casos 'posibles' (61.917.364.224).

$$(110 / 61.917.364.224) = 0{,}000000001777,$$

es decir, algo así como dos casos cada MIL MILLONES…

La probabilidad ***no es*** CERO, pero es muy muy muy muy (¿dije muy?) baja…

Como usted advierte, la pregunta que me hizo Marianela viene con una *sospecha* incluida. La sospecha de ella y el grupo de personas que componen su grupo de trabajo es que el 'sorteo' no es honesto, o mejor dicho, *no es un verdadero sorteo*. ¿Usted qué piensa?

Apéndice que explica los números que escribí antes

a) Cada *caso* tiene 12 posibles juzgados en donde puede caer si fuera sorteado. Pueden ir a parar todos al mismo lugar o a lugares distintos, da igual.

Las distribuciones posibles se calculan multiplicando el número 12 por sí mismo *diez veces*. Es decir:

$$12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 = 61.917.364.224$$

b) Uno sabe que *nueve* de los *diez* casos fueron adjudicados al juzgado número 12. ¿Cuántas formas hay de elegir esos nueve casos? Si lo quiere pensar conmigo, fíjese que contestar esa pregunta es lo mismo que contestar ¿de cuántas formas se puede elegir *un* caso de los 10? (que sería el que *no* le tocó al juzgado

número 12). La respuesta es sencilla: ¡hay 10 formas de elegir cuál es el caso que se queda 'afuera'!

¿Y cuántos juzgados quedan para el caso que no cayó en el juzgado 12? Esto también es fácil: quedan 11 juzgados.

¿Cómo unifico toda la información? Son 10 formas de elegir nueve casos y 11 juzgados en donde puede ser sorteado el otro, por lo que el resultado se obtiene multiplicando (11 × 10 = 110).

c) Ahora, lo que queda es calcular la probabilidad que buscábamos, y para eso todo lo que tengo que hacer es dividir

110 / 61.917.364.224 = 0,000000001777… (aprox.)

El primer número diferente de cero está en el lugar de las *mil millonésimas.* De ahí surgió entonces lo que escribí más arriba: hay 'un poquito menos de **dos**' posibilidades cada mil millones.

Es cierto que ***no es cero***… pero se le parece muchísimo, ¿no lo cree?

¿Qué pasa con la lotería en Alemania y los pares de números consecutivos?

Quiero contar una historia que viví en Múnich, hace algunos años. Estaba desayunando en el hotel donde me hospedaba, cuando varias personas que sabían que yo era matemático se acercaron para plantearme un problema. Supongo que este tipo de situaciones las vivimos todos los que de alguna forma estamos ligados con la matemática propiamente dicha, y la 'fantasía' de quienes no lo son, es imaginar que nosotros tenemos algún tipo de ventaja en los juegos de azar. Por supuesto, me apuro a escribir que esa noción es *falsa*, o en todo caso, *tan falsa* como que alguien que se dedica a la medicina tiene menos posibilidades de enfermarse (si es que me permite el ejemplo).

Llegado a este punto, quiero compartir la pregunta que me hicieron. En Alemania (o al menos en la versión que ellos me contaron), una de las variantes de la lotería es *seleccionar seis números* entre los primeros 49 (del 1 al 49). Quien acierte los *seis* (obviamente sin importar el orden), gana el premio mayor. Claro está: lo tendrá que compartir con todos los que acierten también.

La primera pregunta es la siguiente: ¿cuántas posibilidades hay de elegir *seis* números entre los primeros 49?

La respuesta a esa pregunta la ofrecen los números com-

binatorios[33]. En este caso hay que calcular el número combinatorio C(49,6) = 13.983.816 (casi 14 millones de posibilidades).

Pero esa *no fue* la pregunta que me hicieron sino una variante. Ellos querían saber *¿cuántas posibilidades hay de elegir seis números entre los primeros 49 de manera tal que haya* ***por lo menos dos números consecutivos****?*

Es decir, uno sabe que hay casi 14 millones de posibilidades de elegir *seis* números entre los primeros 49, pero ¿cómo hacer para determinar cuáles de esas posibilidades tienen al menos dos consecutivos?

Justamente, mi idea es dejarle planteada la pregunta para que sea usted quien elabore una estrategia que le permita contar cuántas variantes hay con dos números consecutivos (por lo menos) entre los seis que va a elegir. ¿Cómo hacer?

33. Si n es un número natural (1, 2, 3, 4, etc.), se llama *factorial* de ese número n, y se escribe $n! = n \times (n-1) \times (n-2)\ x \ldots x\ 4 \times 3 \times 2 \times 1$. Ejemplos: a) $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$; b) $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3.682.800$. Es importante que escriba acá que el *factorial* de un número n ($n!$) calcula de *cuántas formas se pueden ordenar n objetos*. Por ejemplo, si usted tiene 20 libros en un estante de su biblioteca y quiere saber de cuántas formas los puede ordenar, el número 20! es la respuesta a esa pregunta. Por otro lado, el número combinatorio C(n,r) es el número que *cuenta* de cuántas formas se pueden elegir r objetos entre n. Ese número se calcula así: $C(n,r) = n! / ((n-r)! \times r!)$. Ejemplos: a) $C(5,2) = 5!/((5-2)! \times 2!) = 120/(6 \times 2) = 120/12 = 10$; b) $C(7,3) = 7!/((7-3)! \times 3!) = 5040 / 24 \times 6 = 35$. Naturalmente, si le interesa entender *por qué* estos números sirven para calcular, le sugiero que busque en cualquier libro sobre combinatoria o en internet. La literatura es muy abundante y muy ilustrativa.

Una forma de encontrar la respuesta

Antes de avanzar, me gustaría proponerle pensar una estrategia que usamos mucho en matemática, y verá qué útil que es. Supongamos que yo le dijera que de las 13.983.816 formas de elegir *seis* números entre los primeros 49, hay 13 millones de esas posibilidades que ***no tienen*** números consecutivos. ¿Qué haría usted para calcular las posibilidades de que ***sí*** tengan al menos dos consecutivos? Piénselo por un instante…

Fíjese que si yo ya le digo que hay 13 millones que *no* contienen números consecutivos y en total hay 13.983.816, entonces las que faltan (las 983.816) *deben* tener SEGURO —por lo menos— dos números consecutivos. Es decir, si puedo contestar las que *no* tienen consecutivos, puedo *deducir* las que *sí* los tienen números. Y viceversa.

¿Por qué le planteé esta pregunta? Me parece que es más fácil calcular las combinaciones *que* NO *tienen números consecutivos*. Si lo logro, después las resto de las 13.983.816 y las que obtenga son EXACTAMENTE las combinaciones que estoy buscando.

Si me siguió, le propondría entonces que piense el problema usando lo que escribí antes y trate de ver si le resulta útil para encontrar la respuesta. Por supuesto, si usted halló otra manera, olvídese de lo que yo escribí y después *comparamos* las respuestas, ¿le parece?

Sigo yo. Supongamos que quiero calcular las que *no* tienen números consecutivos. Pensemos juntos.

Tomemos seis números ***cualesquiera*** entre los primeros 49. Los voy a llamar así: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 y x_6, ordenados de menor a mayor. Es decir, x_1 es el más chico de todos los números, después el más chico de los queda es x_2, luego x_3, x_4, x_5 y finalmente x_6, que es el mayor de todos.

Evidentemente, si los tomo sin ninguna precaución, bien podría pasar que x1 y x2 fueran consecutivos. Pero si considero x1 y (x2 + 1), estos dos *seguro* que no son consecutivos. Ahora considero x2 y x3. Estos dos *podrían* ser consecutivos (cosa que quiero evitar), pero tengo que tener cuidado porque si considero (x2 + 1) y x3 no solo podrían ser consecutivos: ¡podrían llegar a ser iguales! ¿Qué hago entonces? Elijo (x2 + 1) y (x3 + 2). De esta forma, *seguro* que no pueden ser consecutivos. ¿Cómo sigo? (¿quiere pensar usted?).

Lo que hago es considerar

$$(x1, x2 + 1, x3 + 2, x4 + 3, x5 + 4 \text{ y } x6 + 5)$$

Estos *seis* números *seguro* que no son consecutivos y están ordenados de menor a mayor.

Pero hay *otro* punto que debo tener en cuenta. Fíjese que si el número x6 que yo había elegido era el 49, entonces ¡(x6 + 5) = 54! No puedo permitir que pase esto. ¿Cómo lo soluciono?

El *peor* de los casos es que el acabo de planteare (que x6 = 49). Entonces, si en lugar de 'llegar' hasta 49, solamente permito que x6 sea igual a 44, entonces, aunque le sume 5, no me 'paso' de 49.

En consecuencia, lo que debo hacer si quiero contar *todas* las posibilidades de elegir *seis* números entre los primeros 49 que *no tengan números consecutivos*, es lo mismo que elegir *seis números* cualesquiera *entre los primeros* 44 (note que escribo 44 y *no* 49).

¿Cómo calcular este número? Con el *combinatorio*

$$C(44,6) = 44! / ((44 - 6)! \text{ X } 6!) = 44! / 38! \times 6! = 7.059.052$$

Al llegar acá, lo que necesito para terminar de resolver el problema original, es *restar* 7.059.052 a los 13.983.816 que hay en total.

Final

$$13.983.816 - 7.059.052 = 6.924.764$$

Entonces en total hay casi *siete millones* de formas de elegir seis números entre los primeros 49 que tengan —por lo menos— un par de números consecutivos. En términos porcentuales, como

$$6.924.764 / 13.983.816 = 0{,}49519845$$

entonces casi un 49,52% de los posibles sextetos tienen al menos un par de números consecutivos, y el restante 50,48% son sextetos *que no tienen* ningún par de números consecutivos.

¿No es bonita esta manera de pensar el problema? ¿Tendrá usted alguna otra?

Apéndice. Una observación de Carlos D'Andrea

Cuando le envié este problema (en un intercambio de correos electrónicos que tuvimos en marzo del año 2019), Carlos me contestó:

> Lo único que habría que agregar a esa resolución que está allí es mostrar que cualquier 6-tupla de números no consecutivos entre 1 y 49 se puede escribir como $(x1, x2 + 1, x3 + 2, x4 + 3, x5 + 4, x6 + 5)$ con $0 < x1 < x2 < x3 < x4 < x5 < x6 < 45$, así lo que finalmente acabás contando es la cantidad de 6-tuplas que buscabas y no un subconjunto propio de ellas.

Red Lobster

Hay una cadena de comida en Estados Unidos que en lugar de especializarse en hamburguesas, al estilo McDonald's o Burger King (por poner dos ejemplos), hace hincapié en 'frutos de mar': diferentes tipos de pescados, mariscos, moluscos, etc. Su nombre hace referencia específica a uno de ellos: Red Lobster. En inglés, *lobster* quiere decir 'langosta'.

Estoy seguro de que no se le escapa que la langosta es difícil de conseguir y, por lo tanto, tenerla como plato principal en una cena (o almuerzo), cuesta mucho dinero. Por supuesto, hay excepciones, si es que usted vive en algún lugar costero que no sea turístico; si no, el precio es igualmente muy alto. Pero para variar, me desvié.

La casa central de la cadena Red Lobster se encuentra en Estados Unidos, muy cerca de Disneyworld, Orlando (estado de Florida). Hasta el año 2017 tenía 753 locales distribuidos por el mundo y, además de los que están ubicados en Estados Unidos, también hay negocios abiertos en Canadá, Malasia, Qatar, Arabia Saudita, la Unión de Emiratos Árabes, México… Escribo todos estos países como para dar una idea de la magnitud de la compañía.

Dicho esto, en el año 2003, la persona responsable de la di-

rección general, quien en ese momento ocupaba el cargo de presidente en ejercicio de Red Lobster Hospitality LLC, tuvo una idea para incrementar las ventas: eligió uno de los productos del menú (que supongo habrá analizado rigurosamente) y propuso un eslogan: "Endless Crab: A Celebration of All the Hot, Steaming Snow Crab Legs You Can Eat".

Sí, ya sé, le debo una explicación. Aquí pago: *crab* en inglés, significa 'cangrejo'. El eslogan entonces tendría esta traducción (no necesariamente literal pero le va a dar una idea de la promoción): "Cangrejo Ilimitado: una celebración por todas las 'humeantes' y 'calientes' patas de cangrejo que usted pueda comer".

Algo así como proponer a los clientes que por un precio fijo podían sentarse en cualquier local de Red Lobster y consumir todas las patas de cangrejo que quisiera.

La movida tuvo un impacto brutal, pero no en el sentido que el presidente imaginó. Evidentemente, las estimaciones que hizo fueron muy equivocadas y nunca supuso la capacidad del público de comer patas de cangrejo que traían —encima de todo— desde ¡Alaska!

No sé si hace falta que le diga que el presidente tuvo que renunciar a los pocos días. Más aún, y esto me interesa señalarlo en forma muy particular: si bien pasaron ya más de quince años desde el acontecimiento, el diario *St. Petersburg Times* publicó un artículo firmado por Benita Newton el 26 de septiembre de 2003 con el título "All-you-can-eat Was Too Much" ("Todo lo que usted pueda comer' fue demasiado"). Yo leí el artículo en su versión digital y lo guardé en mis archivos para —eventualmente— poder buscar y citar la fuente que dio origen a esta nota. Lo curioso es que hoy, cuando escribo estas líneas (agosto de 2018), ¡el artículo desapareció! Lamentablemente, yo solamente guardé el link o enlace: http://www.sptimes.com/2003/09/26/State/All_you_can_

eat_was_too_much.shtml, y tomé algunos apuntes de los datos más salientes para poder reproducirlos en algún momento.

De todas formas, en el libro *The Flaw of Averages* (*La imperfección de los promedios* o *La falla de los promedios*), que escribió Sam Savage, hay una referencia al mismo artículo de Benita Newton, y seguramente habrá algún otro tipo de referencia que yo no pude (o supe) encontrar. A esta altura, ignoro las razones por las cuales fue retirada la versión digital, pero lo que me importa en esta nota es marcar el *error de cálculo* que cometió el presidente de la compañía al subestimar fuertemente la capacidad de ingesta del público, especialmente cuando la cantidad es ilimitada y el precio está fijo, y ni hablar de otros factores que quiero desarrollar acá.

Benita Newton, luego de haber conversado con la gente de la compañía, sacó algunas conclusiones que invitaban a reflexionar.

- ¿Cuántos clientes piden —en promedio— 'patas de cangrejo' como plato principal?
- ¿Cuántos de ellos repiten la orden?
- ¿Cuál es la variación del precio teniendo en cuenta que en la abrumadora mayoría de los locales la mercadería es transportada desde Alaska? Es fácil intuir que la fluctuación en el precio de costo tiene un alto impacto en el precio de venta.

Con estas variables, o por lo menos con estas *tres* variables, era *altamente riesgoso* invitar al público a comer 'todo lo que fuera capaz'.

Evidentemente, esto sucedió porque a las pocas semanas el presidente de la compañía, abrumado por el error cometido, presentó su renuncia y dejó a la empresa en un estado crítico, no solo desde el punto de vista financiero, sino también por haber

puesto en riesgo su reputación en el mercado. Está claro que uno no hace una campaña de este tipo, con todo lo que cuesta promocionarla, y la cancela a las pocas semanas sin poder dar demasiadas más explicaciones que las obvias.

En octubre de 2003, quien ocupaba el cargo de presidente del directorio, Joe R. Lee, dijo en una conferencia con analistas: "El problema no sucedía por la primera vez que la gente repetía, sino por la segunda repetición (o sea, el tercer plato). ESE pedido era el que producía el daño mayor".

Y para peor, hubo otro ingrediente que no consideraron: si la gente consumía más 'patas de cangrejo', eso empujaba 'hacia arriba' el precio del cangrejo. En definitiva, la campaña fue un desastre, la compañía sufrió un impacto tremendo y todo provino por *haber hecho mal las cuentas*… O mejor dicho, *¡por haber hecho mal las estimaciones!* Encadenados todos los factores, terminó en una de las peores historias no solo para Red Lobster sino para el mercado gastronómico en general.

Si usted tiene algún negocio que lo impulsa a tener ideas de este tipo, tenga cuidado con los *promedios* y las *generalizaciones o estimaciones*. Suelen ser más riesgosas de lo que parecen.

Apéndice 1. Domino's Pizza[34]

Yo creí que con el artículo de Red Lobster ya había cubierto el tema. Sin embargo, Juan Sabia me escribió a mediados de junio

34. Aquí hay un par de artículos que dan cuenta del episodio: https://www.businessinsider.com/dominos-free-pizza-russia-tattoos-promo-ends-early-2018-9; https://elpais.com/internacional/2018/09/13/mundo_global/1536856522_486449.html (este fue publicado por el diario *El País* de España).

del año 2019 y me advirtió: "¿Sabías de un caso similar con la pizzería Domino en Rusia?".

Contesté que no, que no sabía. Si usted llegó hasta acá en la lectura, puede imaginar lo que pasó aunque le falten los datos puntuales. Los aporto yo acá.

Hay una cadena de pizzerías muy famosas en Estados Unidos. La franquicia se denomina Domino's Pizza. La particularidad que tienen es que —además de ser muy barata— cuando uno las pide por teléfono o por internet, suelen llegar a destino *antes* de que se cumpla la media hora del pedido. Para gente que está con mucho hambre y tiene *poca* capacidad de frustrarse si tiene que esperar un poco más (yo me incluiría entre ellos), la posibilidad de tener una pizzería que provea este servicio suele ser muy valiosa.

En agosto del año 2018, Domino's Pizza abrió una sucursal en Rusia. Con la idea de 'promocionar' esta nueva cadena que empezaba a emerger en Rusia, a *alguien* se le ocurrió avanzar con una idea... ¡sin tener en cuenta los números que involucraban! ¿Cuál fue la oferta? Sígame por acá.

La promoción se llamó Domino's Forever (algo así como Domino para siempre), y decía que si una persona se *tatuaba* en alguna parte *visible* de su cuerpo el logo de la compañía, Domino's se comprometía a entregarle "Pizza de por vida". ¿En qué sentido? Le daría a esa persona 100 pizzas por año... ¡durante 100 años! O sea, 10.000 pizzas.

Todo funcionó bien, pero solo por unos días. Cuando habían pasado nada más que 96 horas (cuatro días desde el comienzo de la promoción), ¡tuvieron que cancelarla! ¿Por qué? Porque solamente en ese tiempo, más de 350 personas se tatuaron el logo tal como estipulaba el aviso, y se presentaron ante la pizzería para registrarse.

Domino's debió retirar la oferta inmediatamente, si es que no querían fundirse. Si usted hace los cálculos, 10.000 pizzas por persona multiplicadas por 350 personas, llega hasta 3.500.000, pero para esto harían falta 100 años (o un siglo). Es preferible hacer *otra* cuenta: 100 pizzas por año multiplicadas por 350 personas implican 35.000 *gratis por año*. Si no se detenían acá, nunca llegarían a cumplir con la promesa.

Eso sí: aún hoy, y con estos ejemplos tan claros, me resulta 'incomprensible' que no hubieran podido deducir que era *muy posible que esto sucediera*. ¡La promoción entonces duró exactamente cuatro días!



Apéndice 2. Restaurante chino

Cuando creí que ya había 'agotado' el tema con la anécdota de Red Lobster y Domino's Pizza, me encuentro con otro ejemplo equivalente, idéntico al caso de Rusia. El de Red Lobster sucedió en septiembre del año 2003, el de Domino's Pizza en agosto de 2018 y este un par de meses antes: junio de 2018. Mire lo que pasó.

Un restaurante en China, que vende una de las comidas más populares ("hot pot"), algo así como un 'puchero' hecho de carne y verdura, típicamente cubierto de papa 'picada', pretendió hacerse muy famoso 'de golpe'. Abrieron en diciembre de 2017 en la ciudad de Chengdu, en la provincia de Sichuan. ¿Su nombre? Jiamener. Con el objetivo de atraer clientes en forma masiva, intentaron una estrategia parecida a la de Red Lobster. En junio de 2018, ofrecieron —por un precio fijo de 120 yuanes (alrededor de 19 dólares)— que el consumidor pudiera pedir la cantidad que quisiera de este plato, indefinidamente… Pero además ese precio los habilitaba a acceder a una tarjeta que les permitía comer esta especialidad… ¡por un mes! Es decir, la tarjeta habilitaba a su poseedor a comer en el restaurante todo lo que pudieran consumir de este plato durante 30 días. ¿Hace falta que siga con el resultado de la promoción o se lo quiere imaginar usted?

Al igual que la compañía norteamericana, tuvieron que cerrar ¡en dos semanas! Encima ¡se presentaron en quiebra! Por las dudas, y si no me cree debido a la increíble similitud de los dos casos, el artículo al que estoy haciendo referencia apareció en el diario inglés *Independent*[35] que recogió la información del diario

35. https://www.independent.co.uk/life-style/food-and-drink/restaurant-all-you-can-eat-close-china-bankrupt-promotion-jiamener-a8408106.html

chino *Chengdu Economic Daily*[36], que publicó la nota el viernes 15 de junio de este año. Tal como usted supone, los clientes comenzaron a compartir la tarjeta con familiares y amigos (raro, ¿no? En nuestro país eso no sucedería 'nunca').

Peor aún: el restaurante, en esas dos semanas, terminó sirviendo comida a 500 comensales diarios, con gente que hacía cola desde las ocho de la mañana y esperando su turno incluso hasta la medianoche. Increíble, pero cierto.

Uno de los dueños, Su Jie, hizo declaraciones al diario local, diciendo que ellos sabían que perderían dinero al principio, pero que la idea era establecer una base de clientes (una clientela) que fuera 'leal'. También afirmó que la gente, además de comer, tenía que beber algo, en particular *cerveza*, y que con la 'masa de dinero' que juntarían, podrían hacer la inversión necesaria para importarla ya que ellos no la producen localmente.

En fin, escribo todo esto y me cuesta trabajo creerlo, pero me rendí ante la evidencia.

36. https://www.scmp.com/news/china/society/article/2150992/chinese-hot pot-restaurant-bankrupt-after-deal-offering-all-you

Una forma de repartir una herencia

Uno de los problemas de la vida cotidiana se presenta cuando —lamentablemente (o no)— hay que repartir bienes que surgen de una herencia. Naturalmente, si se tratar de dinero en efectivo o en una posición *líquida* (por ejemplo, si fuera una herencia en *acciones* o *bonos* o algo equivalente), el problema es muchísimo más sencillo. Se trata de hacer una división y listo. Una vez que uno tiene la cantidad de dinero en efectivo, divide por el número de personas y no hay mucho más por hacer.

Pero en general la situación se complica cuando hay bienes materiales. No hay una *única* manera de hacer la distribución por múltiples razones. Si la situación en la que se encuentran los herederos es 'amistosa' y no hay confrontación visible, todo se reduce a consensuar la forma de dividir los objetos.

Otra alternativa es ceder todos los bienes a una suerte de *albacea* (o persona que se encarga de la administración) y darle la instrucción de que venda todos los objetos o inmuebles hasta que haya una posición de liquidez, como la que describí al principio, y dividir el dinero.

Sin embargo, hay situaciones que requieren de otro tipo de creatividad. Podría suceder (y no se le escapará que esta posibilidad es *muy concreta*) que haya dos o más entre los herederos que quieran apropiarse de un bien en particular: un auto, un barco o

una porción de tierra. En ese caso, hay que decidir *quién le pone un precio* a cada objeto a repartir y, aun así, quién establece una tabla de prioridades para adjudicarlos.

Lo que pretendo hacer con este texto es ofrecer *una* alternativa más que no es ni la más común ni la más conocida[37].

Hace algunos años, Carlos D'Andrea, uno de los mejores matemáticos argentinos, me ofreció la oportunidad de leer el texto que deriva en este artículo que usted está leyendo. Por razones de espacio, voy a resumirlo. Espero que cuando termine de leer sienta que *no ha perdido el tiempo*. Es decir, espero que se lleve alguna idea que no tenía antes, o mejor dicho, que no tiene *ahora*. Si lo logro, me sentiré personalmente satisfecho.

Voy a adaptar el ejemplo que figura en el artículo de referencia, pero lo que le propongo es que trate de *pensar qué haría usted en cada paso* para comparar con mi propuesta.

Me explico. Supongamos que hay tres personas a las que voy a llamar (como no puede ser de otra manera, ¿no es así?) A, B y C. La idea es que ha fallecido un tío de ellos y ha dejado en su testamento la instrucción de que se dividiera el total de la herencia entre estas tres personas.

La herencia consiste en:

a) Un auto eléctrico
b) Una camioneta 4 x 4
c) Un departamento de un ambiente
d) Dos cuadros del famoso pintor argentino Alonso
e) Sesenta millones de pesos

---

37. El artículo original se puede encontrar en: http://www.revistaciencias.unam.mx/en/173-revistas/revista-ciencias-25/1593-el-que-parte-y-reparte-se-queda-con-la-mejor-parte%E2%80%A6.html

La idea es que cada uno de ellos haga una lista de los objetos y les adjudique un valor. Cada lista es personal, individual y los otros dos herederos no tienen acceso a conocerla hasta que los tres las develen en un acto conjunto. Una vez confeccionadas las listas, *se suma* el valor que cada uno consideró que valen los bienes y de esa forma se conocerá el monto total de la herencia según la apreciación de los tres. Por supuesto, este número podrá (y casi con seguridad *será*) diferente en cada caso. Por lo tanto, lo que *cada uno considere que es un tercio* variará de acuerdo con la perspectiva personal.

Al llegar a este punto, algo más que es muy importante: la persona que le adjudicó la mayor valuación a un objeto se quedará con él. Ahora voy a poner un ejemplo para mostrar cómo hacer funcionar la estrategia, *adaptando* la cantidad de dinero en efectivo para satisfacer lo que cada uno cree que es una división *justa* de la herencia.

Fíjese en la tabla que escribo a continuación. En la primera columna, figuran los objetos y el dinero en efectivo. Cada una de las restantes tres columnas, se corresponde con la valuación que hizo cada uno.

	A	B	C
Auto eléctrico	18.000	15.000	16.000
Camioneta 4 x 4	26.000	15.000	20.000
Departamento	40.000	38.000	43.000
Cuadros	60.000	64.000	50.000
Dinero en efectivo	60.000	60.000	60.000
Suma total	204.000	192.000	189.000

Al llegar a este punto, fíjese que como A considera que el valor total de la herencia es de 204.000, una repartición *equitativa* representaría 1/3 de ese valor, o sea, 68.000. Para B, el número sería 1/3 de 192.000 (es decir, 64.000) mientras que para C, sería 63.000.

Por otro lado, A hizo la mayor valuación tanto para el auto eléctrico (18.000) como la camioneta (26.000). Por lo tanto, se quedará con estos dos móviles que suman 44.000.

A su vez, B fue el que le dio el mayor valor a los dos cuadros (64.000) y se hará dueño de ellos. Por último, C fue quien hizo la mayor tasación del departamento (43.000).

Con estos nuevos datos, la Tabla quedará así:

	A	B	C
Auto eléctrico	18.000	15.000	16.000
Camioneta 4 x 4	26.000	15.000	20.000
Departamento	40.000	38.000	43.000
Cuadros	60.000	64.000	50.000
Dinero en efectivo	60.000	60.000	60.000
Suma total	204.000	192.000	189.000
Esto representará 1/3	**68.000**	**64.000**	**63.000**
Bienes asignados	**(auto+ camioneta)**	**(cuadros)**	**(departa- mento)**
Valor de ellos	**44.000**	**64.000**	**43.000**

Ahora, fíjese lo que sucede con cada uno de ellos. Tomemos el caso de A. El valor de los objetos que quedarían para él es 44.000. Sin embargo, como para él un tercio de la herencia es 68.000, hará falta que le compensen la diferencia con 24.000 del dinero en efectivo.

Para B la situación es diferente, porque el valor de los cuadros es 64.000 mientras que la tercera parte de la herencia (de acuerdo con su juicio) es justamente 64.000. Moraleja: no hay que ajustar nada, no hay que darle ninguna parte del efectivo.

Para terminar, al quedarse con el departamento, C obtendría 43.000. Como su *apreciación del tercio de la herencia* es de 63.000, hará falta que le entreguen 20.000.

Llegado a este punto, como hubo que *compensar* a A y a C para que lleguen a lo que les correspondería, hizo falta utilizar una parte del dinero en efectivo: 24.000 para A y 20.000 para C. Como en total había 60.000 y ya se distribuyeron 44.000 (la suma de lo que les correspondió a A y a C), esto quiere decir que quedan 16.000 por distribuir. Se divide por *tres* esa cantidad de efectivo, y llegamos a 5.333 para cada uno.

En resumen, la tabla ahora resulta así:

	A	B	C
Auto eléctrico	18.000	15.000	16.000
Camioneta 4 x 4	26.000	15.000	20.000
Departamento	40.000	38.000	43.000
Cuadros	60.000	64.000	50.000
Dinero en efectivo	60.000	60.000	60.000
Suma total	204.000	192.000	189.000
Esto representará 1/3	68.000	64.000	63.000
Bienes asignados	(auto+ camioneta)	(cuadros)	(departamento)
Valor de ellos	44.000	64.000	43.000
Complemento	**24.000**	**0**	**20.000**

Suma parcial	68.000	64.000	63.000
Dinero restante	5.333	5.333	5.333
Reparto final	73.333	69.333	68.333

Es interesante notar que cada persona recibe 5.333 *más* de lo que consideraba que hubiera sido una tercera parte del total. Es decir, fíjese que por ejemplo A creía que la tercera parte de la herencia hubiera sido 68.000. Sin embargo, al finalizar el proceso, se queda con 73.333.

Por su parte B, se hubiera sentido satisfecha con 64.000 y termina recibiendo 69.333. Lo mismo C, que esperaba 63.000 y obtiene 68.333.

Antes de avanzar, me imagino sus objeciones (muy naturales). Por ejemplo, ¿qué pasaría si no hay dinero en efectivo para compensar las diferencias? O bien, ¿qué pasaría si el tío que falleció estableció que se dividieran los bienes *pero no* en partes iguales? E incluso, ¿qué pasaría si una persona fue la que adjudicó la *mayor valuación* a todos los bienes y se queda con todo?

No pretendo acá buscar una solución final a todas las posibles alternativas, pero puedo ofrecer *algunas* respuestas a *alguna* de las preguntas.

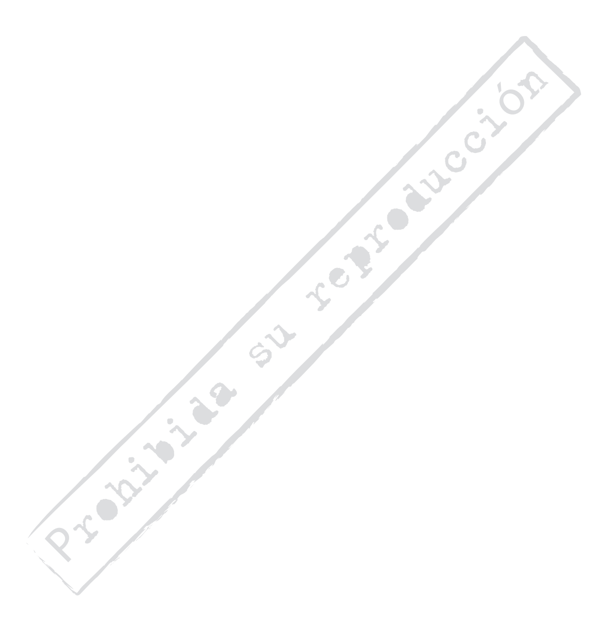
Si no hubiera suficiente dinero en efectivo, las personas que hicieron la valuación mayor entre los objetos podrían *compensar a los otros con dinero en efectivo de su propio bolsillo*, o incluso 'vendiendo' otros objetos de su propiedad, o alguna otra variante que se le ocurra a usted.

No faltará quienes piensen qué sucede si dos de los tres involucrados se ponen de acuerdo en 'sobre-tasar' algunos objetos de manera tal de obtener una parte mayor de la herencia… Y segu-

ramente usted podrá pensar en múltiples ejemplos más atractivos que el que escribí.

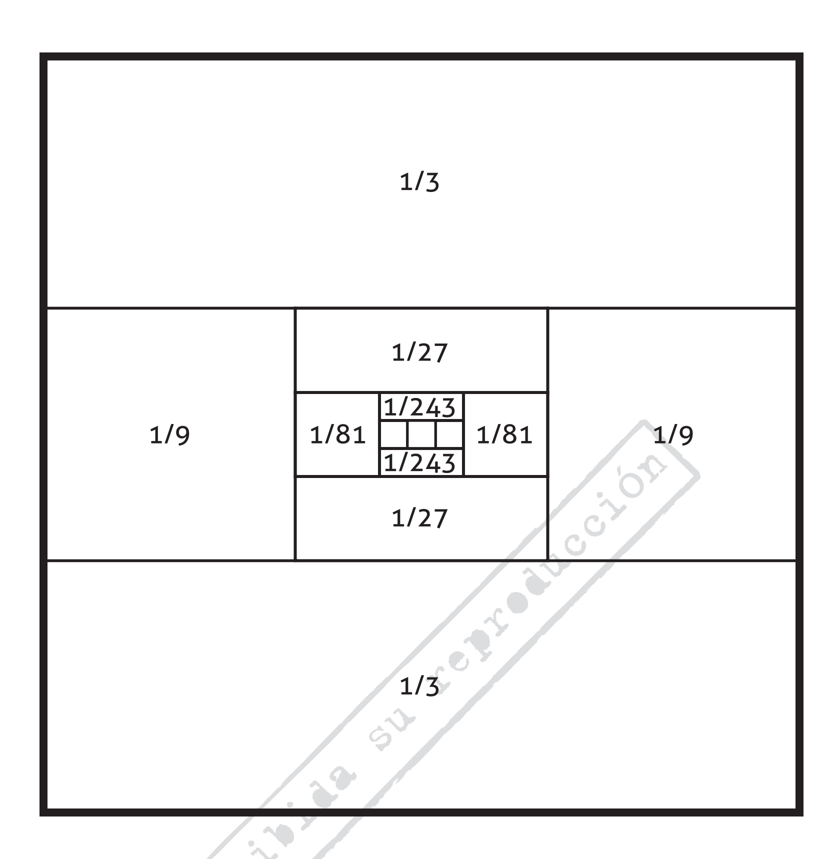
Para finalizar, un ejercicio interesante sería pensar alguna manera de 'generalizar' esta propuesta y ampliarla al caso de más objetos (o más bienes) y más personas, tratando de mantener el espíritu de que la repartición no solo sea 'equitativa' en términos abstractos, sino que deje satisfechas a todas las partes. ¿Se podrá?

Esa parte se la dejo a usted.



Geometría sin palabras

Tengo una propuesta para hacerle. Fíjese en las figuras que aparecen a continuación. Cada una de ellas debería motivarla/o para hacer una conjetura. Es decir, sin que yo tenga que escribir *nada* o agregar *nada*, usted debería estar en condiciones de sacar *algunas* conclusiones. ¿Me permite entonces que la/lo deje en soledad? Créame que vale la pena. Siga usted por su cuenta.

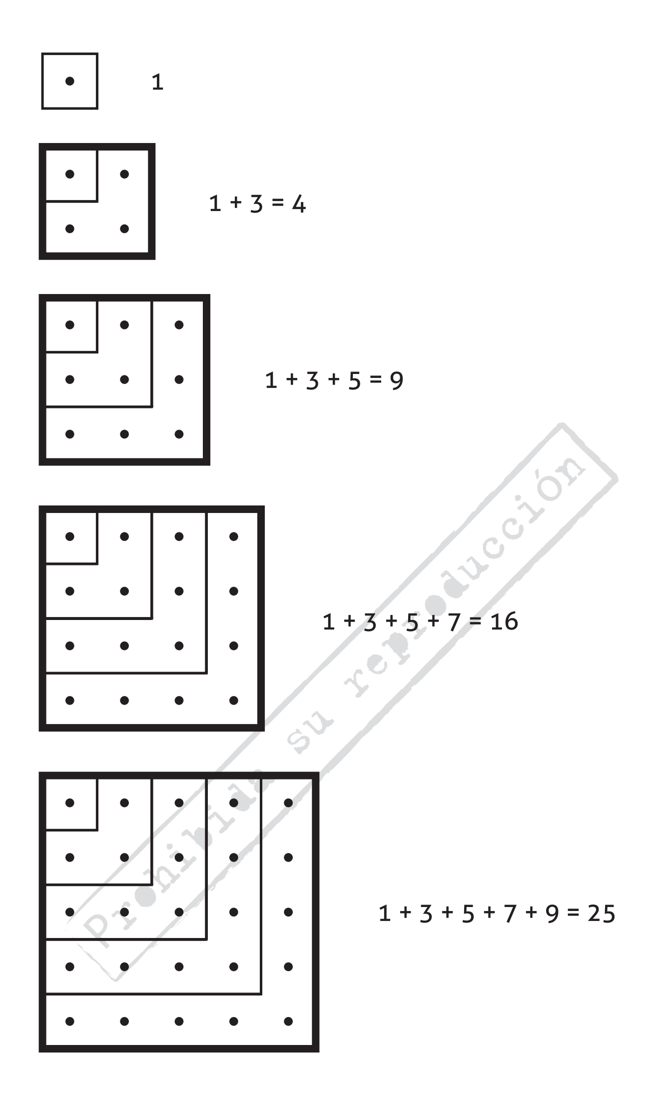


$$1 = 2\,\frac{1}{3} + 2\,\frac{1}{9} + 2\,\frac{1}{27} + 2\,\frac{1}{81} + 2\,\frac{1}{243} + \cdots$$

$$= 2\,\Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \cdots$$

O sea $$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \cdots$$

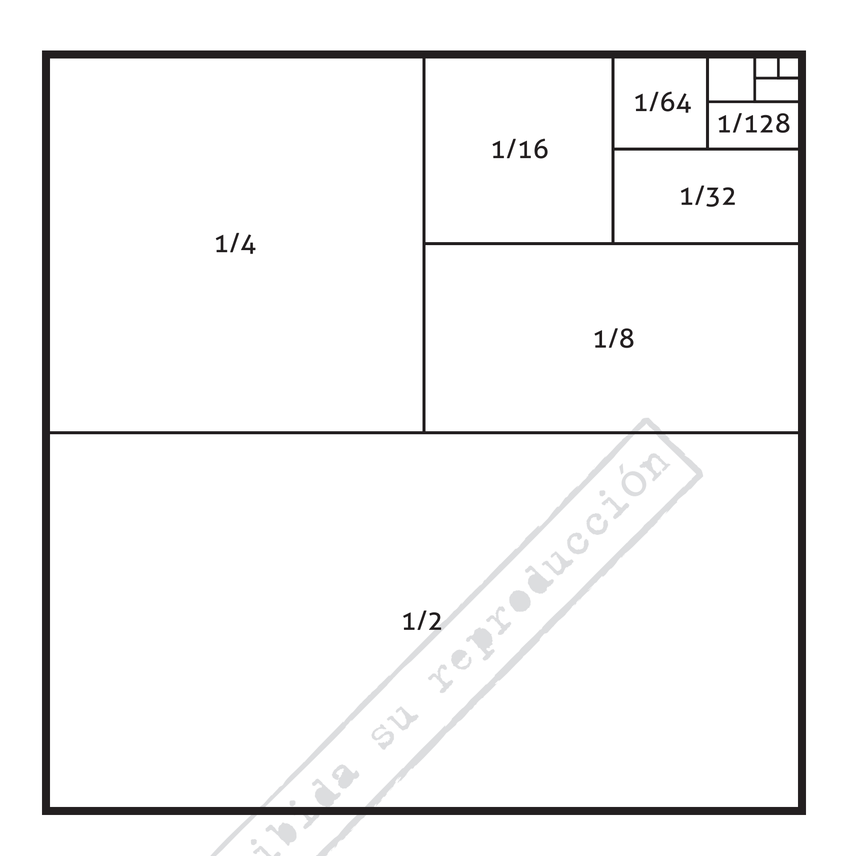
Figura 1



¿Se anima a sacar una conclusión general?
En general:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Figura 2



$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \cdots$$

Figura 3

$$2^2 + 2 \times 2 + 1 = 3^2$$

$$3^2 + 2 \times 3 + 1 = 4^2$$

$$4^2 + 2 \times 4 + 1 = 5^2$$

$$5^2 + 2 \times 5 + 1 = 6^2$$

En general: $n^2 + 2 \times n + 1 = (n + 1)^2$

¿No lo sabíamos ya?

Figura 4

$$(1+2+3+4) + (3+2+1) = 4^2$$

$$(1+2+3+4+5) + (4+3+2+1) = 5^2$$

$$(1+2+3+4+5+6) + (5+4+3+2+1) = 6^2$$

En general:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n) + ((n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \ldots + 2 + 1) = n^2$$

Figura 5

Propagación del error numérico

Supongamos que tiene un campo cuadrado y quiere averiguar el área (o la superficie). Para hacerlo, mide el 'lado' usando un metro. De esa forma, obtiene la longitud pero, por supuesto, al hacerlo comete un *error* en la medición.

Imaginemos también que —haciendo un gran esfuerzo de precisión— obtuvo un lado de 100 metros, aunque estima que lo hizo *con un error menor a los 5 centímetros*. ¿Qué quiere decir esto?

Que la longitud de 'ese lado', o de 'el' lado (ya que es un cuadrado) estará entre 99,95 y 100,05 metros. En ese sentido, es bastante preciso. Fíjese que aunque uno diga "con un error de 5 centímetros", lo que está diciendo en realidad es que el error es ***menor*** que 5 centímetros.

Ahora bien: con un error de 5 centímetros en la medición del lado… ¿qué error tendrá en la determinación de la superficie?

Lo que uno puede hacer es calcular la *superficie máxima* y la *superficie mínima*.

La superficie máxima se obtendrá estimando que el lado mide 100,05 metros. Luego, la superficie se calcula así:

$$(100{,}05)^2 = 100{,}05 \times 100{,}05 = 10.010{,}0025 \text{ m}^2$$

Por otro lado, se calculará la superficie mínima suponiendo que el 'lado' mide 99,95 metros. En ese caso, la superficie se calcula así:

$$(99{,}95)^2 = 99{,}95 \times 99{,}95 = 9.990{,}0025 \text{ m}^2$$

Entonces, el *valor* del área estimado es de 10.000 m², y el error es de

$$(10.010{,}0025 \text{ m}^2 - 9.990{,}0025 \text{ m}^2) / 2 = 10 \text{ m}^2$$

Fíjese entonces que el *error* que se comete es de 'alrededor' de 10 metros cuadrados, lo que significa que el error en la superficie es del tamaño ¡de una habitación entera de más de 3 metros de lado! ¡Y todo se produjo por un error de 5 centímetros en la medición!

Los números felices

Qué nombre *raro*, ¿no es así? Me explico.

De acuerdo con la literatura, los números *felices* aparecieron originalmente en algún lugar de la ex-Unión Soviética, y fueron 'popularizados' por un matemático británico Reg Allenby, de la Universidad de Leeds. Acompáñeme por acá y le cuento qué propiedades debe tener un número para ser considerado *feliz*.

Elija un número entero positivo cualquiera, por ejemplo, 91. Tome cada uno de sus dos dígitos (9 y 1) y elévelos al cuadrado:

$$9^2 = 81 \text{ y } 1^2 = 1$$

Sume los números que obtuvo:

$$81 + 1 = 82$$

Repita el procedimiento (ahora con el número 82). Tome los dos dígitos (8 y 2), elévelos al cuadrado y súmelos después.

$$8^2 = 64$$
$$2^2 = 4$$
$$64 + 4 = 68$$

Repita el proceso una vez más con el número 68.

$$6^2 = 36$$
$$8^2 = 64$$

La suma resulta:

$$36 + 64 = 100$$

En este punto, una breve observación. Le voy a pedir que repita el procedimiento ahora con el número 100. Fíjese que, cuando lo haga, al elevar al cuadrado los tres dígitos (1, 0 y 0), obtendrá:

$$1^2 = 1$$
$$0^2 = 0$$
$$0^2 = 0$$

Si los suma (1 + 0 + 0 = 1), obtiene el número 1.

Acá el proceso se detiene porque, si *sigue*, obtendrá nuevamente el *uno*…

Ahora estoy en condiciones de 'definir' lo que se denomina *número feliz*.

Si usted empieza con un número entero positivo cualquiera y al aplicar el procedimiento que utilicé antes llega al número *uno* en algún momento del proceso, el número se llamará *feliz*.

Si nunca llega, entonces… ese número ***no será feliz***.

Lo primero que necesito/necesitamos hacer, es *convencernos* (usted y yo) de que hay números que *no son felices*. Veamos (¿no quiere intentar usted por su cuenta?).

Tome el número 25. A continuación escribo algunos pasos:

$25 \rightarrow 2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$
$29 \rightarrow 2^2 + 9^2 = 4 + 81 = 85$
$85 \rightarrow 8^2 + 5^2 = 64 + 25 = 89$
$89 \rightarrow 8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145$
$145 \rightarrow 1^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 16 + 25 = 42$
$42 \rightarrow 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$
$20 \rightarrow 2^2 + 0^2 = 4 + 0 = 4$
$4 \rightarrow 4^2 = 16$
$16 \rightarrow 1^2 + 6^2 = 1 + 36 = 37$
$37 \rightarrow 3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$
$58 \rightarrow 5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$

Y acá paro. ¿Por qué? Es decir, ¿puede determinar usted por qué puedo parar y decir que *seguro* el número 25 no será feliz?

Es que si se fija en la lista, el número 89 ya había aparecido. Por lo tanto, ya *sabemos*[38] que nunca voy a llegar al número 1.

Observaciones y preguntas

1) Cuando uno quiere determinar *si un número es feliz o no*, está obligado a seguir el proceso que expliqué en este capítulo. En el camino, aparecen varios números intermedios. Fíjese lo que sucedió con los números 91 y 25. Estos son los que aparecieron en el camino:

a. 91, 82, 68, 100, 1

---

38. Es decir: como el 89 ya apareció en la lista anteriormente, si continúo con el proceso, después del 89 seguirán 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58 y… nuevamente el 89. O sea, entro en una suerte de círculo o circuito del cual nunca voy a salir. Por lo tanto, nunca voy a llegar al número *uno*.

b. 25, 29, 85, 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89

¿Qué conclusiones podríamos sacar de estos dos casos particulares?

Por ejemplo, podríamos deducir que *todos los números intermedios que aparecen en la lista de un número feliz ¡son felices ellos también!* Es decir, los que aparecen en la lista del 91 (82, 68 y 100) son todos ellos felices. O sea, cuando uno 'descubre' un número feliz, *todos los números intermedios* hasta llegar al 1 son felices también. ¿Está de acuerdo conmigo?

2) El mismo criterio se aplica 'al revés'. ¿Qué quiero decir con 'al revés'? Es que si uno mira la lista que genera un número que *no es feliz*, por ejemplo, el número 25 (29, 85, 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89), *todos* los números intermedios *no pueden ser felices tampoco*.

3) A continuación escribo una grilla con los *veinte* números *felices* que aparecen entre 1 y 100 (y los números intermedios).

			31	**10**	1				
		23	**13**	10	1				
	44	**32**	13	10	1				
70	**49**	**97**	130	10	1				
7	49	97	130	10	1				
	94	97	130	10	1				
	91	**82**	68	100	1				
	19	82	68	100					
	28	**68**	**100**	**1**					
		86	100	1					
		79	130	10	1				

Los veinte números felices entre 1 y 100 son: 1, 7, 10, 13, 19, 23, 28, 31, 32, 44, 49, 68, 70, 79, 82, 86, 91, 94, 97, 100.

4) Si tiene ganas (y tiempo), en total hay 143 números *felices* entre los primeros 1.000 números enteros positivos.

5) Supongo que, si llegó hasta acá, ya habrá advertido que si un número es *feliz*, cualquier *reordenamiento* de sus dígitos *también* sigue siendo feliz. Por ejemplo, 23 y 32, 79 y 97, 68 y 86 son todos pares de números felices. Al mismo tiempo 230, 203, 302, 320 son todos felices también.

6) Un agregado para aquellas personas interesadas en *programación*. ¿No sería interesante escribir un pequeño 'programita' para determinar los números felices que hay en un cierto rango?

Preguntas

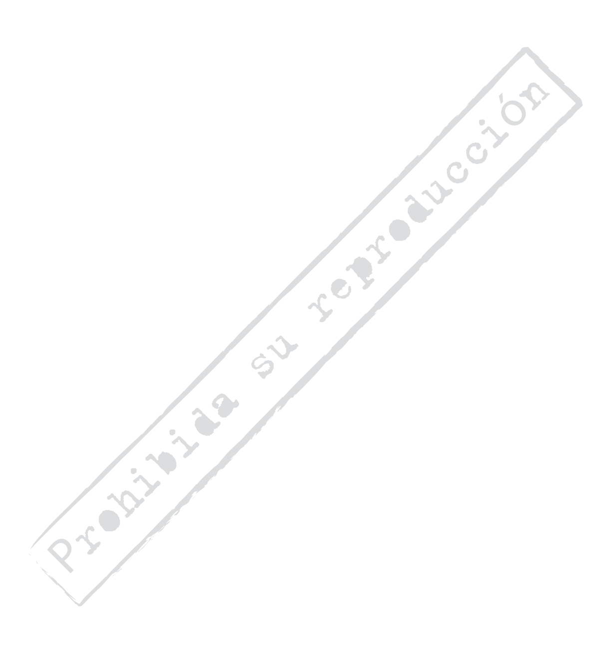
1) ¿Hay infinitos números *felices*? Respuesta: sí. ¿Quiere pensar usted por qué?[39]
2) ¿Hay infinitos números *no felices*? Respuesta: sí[40].
3) ¿Qué pasaría si en lugar de elevar al *cuadrado* los dígitos que componen un cierto número entero, los eleváramos

39. Seguro que hay infinitos números *felices* porque todas las potencias de 10 (1, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000, 1.000.000, etc.) son todos números felices.

40. Hay infinitos números *no-felices* porque 2, 20, 200, 2.000, 20.000, 200.000, etc., lo son. Como 4 es un número *no-feliz* (compruébelo usted y verá), entonces todos los que son de la forma 2×10^n son también números *no-felices*.

al *cubo* y después los sumáramos? ¿Y elevándolos a otras potencias?

4) ¿Hay números *felices* que sean *números primos*? Respuesta: sí. Por ejemplo, 7, 13, 19, 23, 31…
5) ¿Hay *infinitos números primos* que sean *felices*? No sé la respuesta a esta pregunta… ¿usted?



Otro problema breve, precioso, más complicado: ¿Es cierto que $(7!)^8 < (8!)^7$?

¿Cómo se puede demostrar que $(7!)^8 < (8!)^7$?

Por un lado, puedo descomponer

$$(7!)^8 = (7!)^7 \times 7!$$

Y por otro,

$$(8!)^7 = (7!)^7 \times 8^7$$

Luego, como $(7!)^7$ aparece como 'factor' de los dos términos, lo puedo eliminar y, por lo tanto, lo que quiero demostrar se reduce a probar que:

$$7! < 8^7$$

Y esto es algo de lo que uno se convence rápidamente, si tenemos en cuenta que el miembro de la izquierda es:

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

y el de la derecha es

$$8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8$$

¡Listo!



Geometría y pensamiento lateral (Parte 1)

Suponga que yo dibujo tres cuadrados de lados 6, 5 y 4 metros, ubicados uno al lado del otro (a medida que va decreciendo el 'lado' o el 'área'). Ahora yo *pinto de gris una zona*, tal como se ve en la Figura 1.

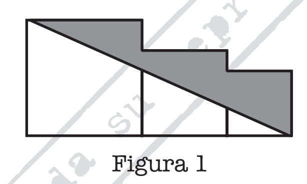


Figura 1

Tengo una pregunta para usted entonces: ¿cuál es el área de esa región? (la que pintamos de gris).

Debo suponer que hay *múltiples maneras* de arribar a la respuesta, pero mi idea es proponerle que trate de elaborar una estrategia que le permita contestar la pregunta sin tener que hacer *demasiadas cuentas* ni usar nada muy sofisticado. ¿Tiene ganas de pensar un rato?

Lo que sigue fue lo que se me ocurrió a mí, pero quizás usted haya encontrado (o pueda encontrar) una forma diferente, y si lo hizo… *¡seguro que es mejor que cualquiera que le pueda proponer yo, ya que es SUYA!*

Ahora sí, acá va *una* forma de pensar el problema.

Fíjese en las bases de los tres cuadrados. Miden 6, 5 y 4 metros respectivamente (de izquierda a derecha). Es decir, el segmento que une a las tres bases mide 15 metros en total.

Por otro lado, el lado vertical del cuadrado más grande mide 6 metros. Tratemos de 'construir' un rectángulo de 6 × 15. ¿De dónde aparecen estos números?

a) 15 metros se obtienen si sumo las 'bases' de los tres cuadrados (6 + 5 + 4) = 15.
b) Por otro lado, los 6 metros resultan de usar el lado 'vertical' del cuadrado mayor.

Ahora, hemos construido (imaginariamente) un rectángulo de 6 × 15, como si hubiera *prolongado* la tapa superior del cuadrado mayor hasta completar los 15 metros y utilizado los 6 metros verticales de lado que mide el cuadrado mayor. Fíjese entonces en la Figura 2.

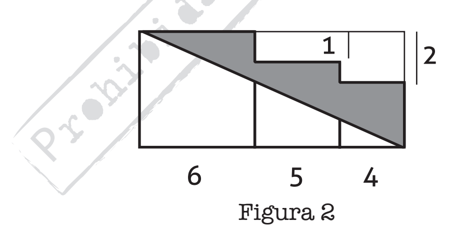


Figura 2

¿Cuál es el área del rectángulo que construimos? Mide 6 × 15 = 90 metros cuadrados.

Ahora tracemos juntos la *diagonal* de este rectángulo. Esta diagonal divide al rectángulo en dos partes iguales. Como el área total mide 90 metros cuadrados, el área que queda por 'encima' de la diagonal mide la mitad: 45 metros cuadrados.

Pero esta *no es la solución* (todavía). ¿Por qué? Lo que yo quiero es calcular el área de la zona 'gris' y para eso tendría que *restarle* a esos 45 metros cuadrados… ¡el área de la parte 'blanca'!

¿Cómo hacer? ¿Quiere pensar por su lado por un instante? Yo la/lo espero acá.

Mire esa parte 'blanca'. Fíjese que puedo *dividirla* en dos rectángulos (ambos blancos). ¿Los ve?

Le cuento cuál será mi estrategia: voy a tratar de calcular el área de cada rectángulo, voy a sumar estas dos áreas, y el resultado se lo voy a restar a 45. ¡Esa será la solución! Así habré restado del área total del triángulo que está 'arriba' de la diagonal (que vimos que medía 45 metros cuadrados), el área que quedó pintada de blanco.

El resultado es lo que buscamos: ¡el área gris!, que es lo que mide el área de la mitad del rectángulo (si puedo calcular el área de cada uno de estos rectángulos: una formada por un rectángulo, y otra por un cuadrado. ¿Ve estas dos figuras?).

El rectángulo más pequeño tiene un lado (el vertical) que mide 1 metro y otro que mide 5 metros. En consecuencia, el área de ese rectángulo es $1 \times 5 = 5$ metros cuadrados.

El otro rectángulo tiene un lado de 2 metros y otro de 4 (¿los ve?). El área entonces es $2 \times 4 = 8$.

Si ahora sumo estos dos números ($5 + 8 = 13$), obtengo el área de la parte 'blanca'.

Como el área del triángulo era 45 metros cuadrados, al restarle los 13 metros cuadrados de la parte blanca, obtenemos lo que queríamos: $45 - 13 = 32$.

¡Y esa es la respuesta! La zona 'gris' mide 32 metros cuadrados. ¡Listo! ¿No es bonita esta idea? ¿Usted qué piensa?

Geometría y pensamiento lateral (Parte 2)

El otro día, conversando con un matemático de origen chino, me comentó sobre un problema que les habían planteado a niños de seis años en algunas escuelas públicas. Me mostró una figura (que es la que aparece a continuación) y me dijo que la pregunta que les hacían era la siguiente: "Traten de determinar el área de la superficie pintada de gris… la zona gris".

Me pareció un poco 'raro' que fuera para niños de seis años pero para convencerme me mostró un enlace de una página en internet en donde se proponía el mismo problema. En la presentación dice, explícitamente, que fue presentado a niños chinos de seis años.

Dicho esto, creo que no interesa demasiado si fue así o no; lo que *sí* me importa es proponerlo acá y planteárselo a usted. Pero quiero hacer una observación más: ¡no importa si usted *puede o no* hacer las cuentas! Yo le voy a aportar los datos que quizás usted necesite. Lo que me parece muy interesante es que usted pueda decir: "Esta es la estrategia que yo usaría para calcular lo que me piden". Es decir: para hacer los cálculos, yo le voy a dar lo que necesita, pero usted debe diseñar la estrategia. Y créame, esto es *lo único* que importa. Para elaborar el plan, no le hace falta nada. Para hacer las cuentas, sí.

Ahora, algunos detalles que quizás necesite.

1) El *área* de un círculo se calcula (como usted debe haber escuchado miles de veces, muy posiblemente en la escuela y/o colegio) como (π x radio al cuadrado). A los efectos de hacer las cuentas más sencillas, si cree que lo necesita, utilice 3,14 como aproximación del número π. Con eso le va a alcanzar.

2) Si le hiciera falta, el *radio* (en una circunferencia o un círculo) es la 'mitad' del diámetro. Por ejemplo, si usted mira una rueda de bicicleta, 'los rayos' que salen desde el centro son todos radios de esa rueda. Por supuesto, es solo una manera de visualizar lo que es un 'radio'.

3) Dos datos más, no sé si los necesitará o no, pero para que no tenga que ir a buscarlos en otro lado: el *área de un rectángulo* se calcula como la 'base' por la 'altura', es decir, la longitud de un lado multiplicada por la longitud del otro. Y por último, el *área de un triángulo* se calcula como la medida de la 'base' por la longitud de la 'altura' y sí… me imagino que le sale una voz desde adentro que le dice: DIVIDIDO DOS. Bien: el área de un triángulo es efectivamente, 'base por altura sobre dos'.

Con todos estos datos, fíjese en la Figura 1 y trate de *estimar* el área de la "zona gris". La figura consiste de un rectángulo cuyos lados miden 10 y 20 (podrían ser metros, centímetros o la unidad que usted quiera, ese dato es irrelevante; lo único que importa es que uno mide 10 y el otro mide 20). Dentro de ese rectángulo hay dos círculos, que son 'tangentes' en el sentido que se 'tocan' solamente en un punto (como se ve en la Figura 1).

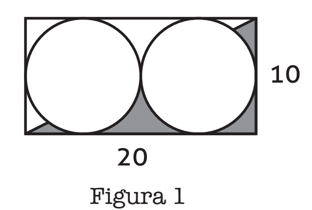


Figura 1

Antes de escribir la respuesta, me gustaría proponerle una vez más algo que me parece superimportante: ¡no lea lo que viene a continuación! ¡No se prive de pensarlo por su cuenta! ¿Quién la/lo apura? Permítase tener este problema en su cabeza tanto tiempo como le haga falta. Quizás se le ocurra enseguida; quizás no. ¿Y? ¿Qué diferencia hay? Ahora sí, *su turno*.

Respuesta

Fíjese en lo siguiente. La 'diagonal' que corta el rectángulo por la mitad deja al área del rectángulo dividido en dos mitades. La zona gris que aparece en una mitad (en el triángulo de abajo) tiene una *réplica* en el triángulo de arriba. Es decir, el triángulo de arriba *también tiene su zona gris*, solo que no está marcada. Con este dato, ¿no tiene ganas de seguir por su cuenta ahora?

En todo caso, lo que uno podría hacer es lo siguiente: tomar el rectángulo entero, calcular el área y *restarle* el área de los dos círculos. ¿Qué se obtendría? No tendríamos lo que queremos, pero estaríamos cerca, porque si al área del rectángulo le quitamos la de los dos círculos, vamos a tener *dos zonas grises*. Nos bastará con dividir por dos ¡y listo! Y justamente eso es lo que hay que hacer. Faltan las cuentas, pero el 'plan' conduce a la solución.

¿Qué datos necesitamos?

a) Área del rectángulo. Esto es fácil: (lado por lado) = $10 \times 20 = 200$.

b) Área de cada círculo. Como escribí antes, es (π x radio al cuadrado). ¿Cuánto mide el radio? (¿quiere pensarlo usted?). Mientras tanto, yo sigo. Hay muchas maneras de convencerse de que el radio mide 5. Yo le propongo que mire el círculo de la derecha (por ejemplo). El *diámetro* (que es la medida que va entre los dos puntos en donde ese círculo 'besa' el techo y el piso del rectángulo) mide 10. Como el radio es la mitad del diámetro, entonces, el radio mide 5.

c) ¿Cómo se calcula el *cuadrado* del radio entonces? Basta con multiplicarlo por sí mismo; es decir $(5 \times 5) = 25$.

¿Y ahora? Faltan los cálculos finales.

1) Área del círculo: (π x radio al cuadrado) = $(3{,}14 \times 25) = 78{,}5$.

2) Área de los *dos círculos sumados*: $78{,}5 + 78{,}5 = 157$.

3) Si restamos el área del rectángulo menos el área que ocupan los dos círculos, se tiene: $200 - 157 = 43$.

4) Pero este no es el resultado final, porque esto mide el área de ***las dos zonas grises***. Todavía falta dividir este número por la mitad: $43 / 2 = 21{,}5$.

Listo. La zona gris mide **21,5.**

Para terminar, quiero hacer algunas reflexiones con usted. Si el objetivo pasa por hacer *todos los cálculos*, entonces *sí*, necesita de todos los datos que yo le di antes, pero para mí lo *esencial* es ser capaz de elaborar un plan, una idea, una estrategia, que sea conducente para llegar a la solución. Las cuentas las puede hacer una calculadora o una computadora. *El plan lo tuvo que hacer usted.*

Percepción espacial

Este es un problema precioso. En algún sentido, sirve para 'medir' nuestra percepción espacial. ¿Qué quiere decir esto? La idea es tratar de ver cuán capaces somos (usted y yo) de 'imaginar' lo que no vemos. O sea, si yo le mostrara solamente *una parte* o *algunas partes* de un objeto pero no el todo, ¿cuán capaz sería usted de 'describir' o 'imaginar' lo que no ve?

Por ejemplo, si yo le mostrara una foto recortada de su madre, de un hijo o de un amigo muy cercano, o incluso de una figura pública reconocida (como Ginóbili o Messi), es muy posible que usted pudiera inferir a quién corresponde la foto aunque haya partes que no ve.

Si la foto mostrar solamente la mitad de la cara, o los dos ojos y la frente, pero no la nariz ni la boca, es muy posible que usted, aun con esos pocos datos, dedujera quién fue el fotografiado.

Así como parece sencillo para un humano, para las computadoras ese suele ser un problema altamente *no trivial*. Más aún: al día de hoy todavía no hay garantías de que aun las computadoras más potentes puedan inferir lo que a un humano le resulta muy sencillo. ¿Hacia dónde voy?

Para ponerlo en otros términos: reconocer *imágenes* es algo sencillo para un humano y muy complejo para una computadora.

Ahora bien. Yo le voy a proponer acá que mire un dado. Sí, un dado. Si se fija en la Figura 1, verá tres caras del mismo dado como si alguien hubiera tomado una fotografía desde distintos ángulos. En lugar de tener los números del 1 al 6, este dado tiene seis letras diferentes: B, C, E, I, N y R.

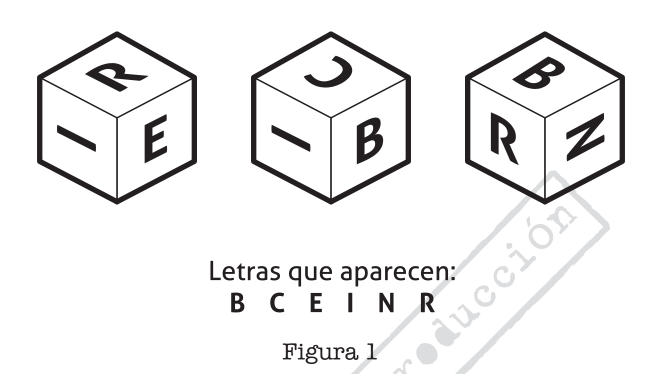


Figura 1

Esas letras aparecen con diferentes orientaciones, dependiendo de la posición en la que estaba puesto el dado.

Ahora bien: suponga que usted tuviera que 'construir' el dado para que, una vez armado, existieran formas de apoyarlo en una mesa de manera tal de reproducir los ángulos (y las orientaciones) como las que aparecen en la Figura 1.

Para poder 'fabricarlo', primero tendrá que hacer una suerte de 'diseño' en un papel de cómo tiene que distribuir las letras en cada una de las seis caras. A manera de 'ayuda' (y referencia), marqué explícitamente la letra R. Fíjese en la Figura 2.

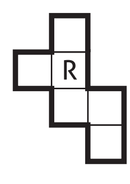


Figura 2

Ahora le propongo que 'arme' el dado en el papel. Para poder hacerlo, como escribí anteriormente, no alcanzará con distribuir las letras en los 'cuadraditos' que les correspondan, además hay que dibujarlas con la orientación indicada, para que el dado tenga las caras ubicadas de tal forma que siempre se lo pueda ubicar en la mesa y sacarle fotos como las que aparecen en la Figura 1.

Al llegar acá, le toca a usted. Ya están expuestas *todas* las dificultades. Lo único que hace falta es sentarse y… *pensar*.

Respuesta

La solución aparece escrita a continuación. No sé si tengo que decir mucho, pero si pudiera ofrecerle una sugerencia le diría que, para convencerse y tratar de 'imaginar' lo que no se ve, intente construir el dado por su cuenta. En realidad, la idea sería tratar de 'imaginar' todo lo que uno *no ve*. La gracia está en ser capaz de 'distribuir mentalmente' las ubicaciones de las letras.

Naturalmente, nadie objetaría si usted necesitara papel, lapicera o incluso una tijera. Usted decidirá qué es lo que le hace falta para convencerse de que lo que percibe, es correcto.

Como le propuse antes, fíjese en la Figura 2. Allí aparece una 'matriz' que le servirá para fabricar el dado. Como la letra R ya está ubicada, lo que uno podría hacer es decidir primero en qué cuadradito tiene que ir cada letra. Advierta que no alcanza

con colocar las letras de cualquier forma, sino que es necesario 'orientarlas' de manera adecuada.

Si lo logra, verá que una vez que 'doble' el papel para construir el dado, las letras no van a aparecer siempre en forma vertical, sino que irán cambiando a medida que rote el dado.

Empecemos. Una vez más, concentrémonos en la Figura 1. Fíjese en la primera foto del dado. En la parte superior aparece la letra R y uno encuentra (yendo hacia abajo) la letra E. Como la R y la E están orientadas para que se vean en forma correcta, cuando las tenga que ubicar en la 'matriz' de la Figura 2, la E aparecerá debajo de la R, ambas orientadas para que uno las pueda 'leer' en forma habitual (mire la Figura 3).

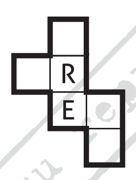


Figura 3

Ahora, tratemos de ubicar la I. Mire el primer 'dado' de la Figura 1. Como ya tenemos ubicadas las letras R y E, entonces la I aparece en forma 'horizontal' si uno lo desde ese costado. Eso quiere decir que si uno pudiera 'levantar' la cara en donde está la letra I (haga de cuenta que hay una 'bisagra' que une el costado izquierdo de la letra R y la parte superior de la cara en donde está escrita la letra I), decía… si uno levantara esa tapa, vería la letra I ubicada ahora 'a la izquierda' de la letra R y posicionada de tal forma que se deberían poder leer ambas (la I y la R) en posición habitual (observe la Figura 4).

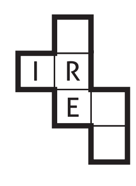


Figura 4

Esto resolvió entonces en donde ubicara la letra I.

Ahora fíjese en el tercer dado de la Figura 1. Como ya tenemos ubicada la letra R, imagine lo mismo que hice en el caso anterior pero con la 'bisagra' ubicada arriba de la letra R y abajo de la B. Si uno levantara la 'tapa' (o la cara) en donde está la letra R, vería que la B queda 'arriba' de la R y ambas se deberían poder leer en forma habitual. Eso permite decidir dónde ubicar la letra B (observe la Figura 5).

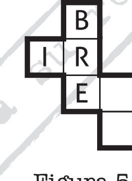


Figura 5

Solamente nos falta ubicar las letras N y C. ¿Quiere pensar usted por su cuenta?

Al llegar a este punto creo que arribamos a la parte más 'delicada', si me permite utilizar esta expresión. Me explico. Fíjese en la Figura 5. Allí están ubicadas cuatro de las seis letras. Tratemos juntos de armar el cubo 'imaginariamente'. Como antes, voy a hacer de cuenta que en las caras hay 'bisagras' que nos permiten ir doblándolas en las direcciones que necesitemos para armar el cubo.

Como aparece en la Figura 5, quiero imaginar la R como la tapa de 'arriba'. Entonces pensemos que hay dos bisagras: una arriba y otra debajo de esa cara en donde está la letra R.

Al tratar de armar el cubo, la R queda arriba, la E queda de frente y, en la parte de atrás, quedará la letra B. Eso sí: si alguien estuviera mirando esa cara, vería la B 'boca abajo'.

Ahora bien, le pido que piense qué pasaría con estas dos caras que por ahora están vacías. Una es la que está a la derecha de la letra E y otra abajo de esa, que por ahora está vacía. Cuando yo doble la letra E, la cara que está a la derecha quedará *exactamente del otro lado de la letra I*. Si se fija en el tercer dado de la Figura 1, verá que la letra N estará 'al lado' de la letra E dibujada como uno la lee normalmente. Claro que cuando uno use esa 'bisagra' y ponga el dado de manera tal que la cara de arriba sea ahora la letra B, la letra N parecerá una Z si uno mira el dado en esa posición. En definitiva, observe la Figura 6 y tendrá ubicadas cinco de las seis letras.

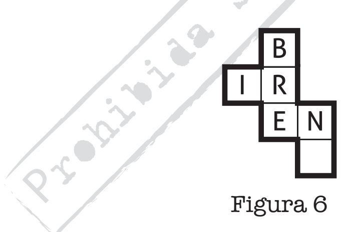


Figura 6

Falta la C y, para ubicarla, hay que mirar el segundo dado de la Figura 1. Si lo hace, verá por qué la *solución* es la que escribí en la Figura 7. ¿Está de acuerdo?

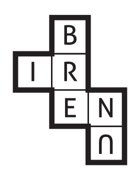


Figura 7

Última observación: ¿no es notable que la percepción espacial no sea tan 'natural' como en principio debería ser? ¿O es que se entrena? Yo estoy convencido de que es así. Como no estamos acostumbrados a tener que 'imaginar' situaciones de este tipo, nos produce un poco de 'vértigo' tener que improvisar, pero si uno lo practica, finalmente va adquiriendo ciertas destrezas que parece no tener.

Al menos eso fue lo que me pasó a mí.

Stefan Mandel y la lotería[41]

La historia del hombre en su búsqueda por 'conquistar' el azar es verdaderamente fascinante. Uno 'sabe' que la probabilidad obra en contra, que las posibilidades son remotas, pero aun así, el *hombre*, usted y yo, mujer u hombre, intenta y ha pugnado 'domar' el azar, y a lo largo de los siglos ha resultado siempre *esquivo*. No pretendo acá hacer una descripción exhaustiva de todos los intentos porque no alcanzaría el tiempo que me queda de vida, por mucho que fuera. Sin embargo, cada tanto, se me cruza alguna historia que no conocía y siento algo así como una 'necesidad' de comunicarla, de contarla o, mejor dicho, de *compartirla*. Es por eso que quiero escribir algunos párrafos sobre la historia de Stefan Mandel. Todo lo que sigue sobre sus primeras experiencias, sucedió en las tres décadas que van desde 1960 hasta 1990, aproximadamente.

Mandel nació en Rumania, cuando todavía se reconocía como un país comunista. Eso sí, Mandel era/es matemático. Su plan fue siempre *doblarle el brazo* al azar. Pero lo curioso es que la forma en la que lo hizo parece (o al menos así me pareció a mí desde que me tropecé con su historia) la más *pedestre de todas*.

41. La historia completa está acá https://thehustle.co/the-man-who-won-the-lottery-14-times

Es decir: si uno pudiera comprar *todos* los números posibles (me refiero a la lotería), debería ganar. Así de sencillo. Ahora bien, uno siempre sospecha que el dinero involucrado para comprar todos los números en juego debería cancelarse con el potencial premio. Peor aun: si algún otro participante *también eligió* los mismos números, entonces habría que repartir el *botín*, por lo que este tipo de estrategia parece aún más inviable.

Por otro lado, uno (yo) imagina que las autoridades de la lotería (cualquiera sea el país del que estemos hablando) deberían contemplar ese caso particular: "Si una persona pudiera comprar ***todos*** los números, claro… debería ganar". Sin embargo, esa frase debería ir acompañada por otra: "No sea tonto. Si los compra todos, tendrá que invertir más dinero del que seguramente va a ganar. ¡No lo haga!". Pero eso no necesariamente es cierto y, curiosamente, dio origen a la historia que quiero compartir con usted. Vea lo que sucedió.

Como escribí antes, Mandel nació en Rumania. Después de graduarse, comenzó a trabajar cooperando con los economistas de una compañía minera. Su idea fue intentar diseñar una estrategia que le permitiera aumentar sus posibilidades de ganar a la 'versión' de la lotería que se jugaba en ese momento en Bucarest (la capital). En principio, quiso ver si podía acceder al segundo premio. No necesitaba acertar *todos* los números (que eran seis elegidos entre los primeros 70): solo los suficientes para obtener el segundo lugar. En el camino descubrió un método que parecía asegurarle que podría llegar al *primer premio*. Ni bien advirtió la posibilidad de diseñar *esa* particular estrategia, para qué preocuparse por el segundo premio si podía quedarse con todo. ¡Y eso fue lo que hizo!

Naturalmente, al avanzar en esta dirección uno empieza a sospechar que en alguna parte aparecerá algo 'ilegal'. Pero no,

hasta ahí, estaba (o parecía estar) 'todo legal', como se diría en portugués. Durante cuatro años, Mandel había dedicado su esfuerzo en garantizarse *cinco* de los seis números que necesitaba 'acertar'. Cuando llegó el momento de hacer la inversión y poner a prueba el método, surgió el primer obstáculo: para implementar su teoría, necesitaba invertir *todos* sus ahorros, todo el dinero que había juntado. Obviamente, más allá de las dificultades matemáticas, el riesgo era enorme. ¿Y si había calculado algo mal?

Lo notable es que, como en las películas, intentando llegar al segundo premio, Mandel ganó ¡todo! Ahora que tenía un poco de dinero, logró hacer lo que hasta allí le hubiera resultado imposible: abandonar Rumania. La historia cuenta que, 'coimeando' funcionarios del Ministerio de Relaciones Exteriores, logró que —en tanto judío— le dieran una visa para emigrar a Israel. Y allí fue.

Mientras seguía con su trabajo 'de oficina', invirtió varios años, una vez más, hasta descubrir las dificultades que tendría que enfrentar para ganar la lotería en Tel Aviv. Como escribí antes, no parecía haber nada sofisticado: la idea era tratar de detectar *cuántos números debía comprar* (si no todos), para poder ganar el premio mayor. Ese premio iba aumentando en la medida que había semanas que se declaraba desierto. Por lo tanto, si bien comprar la misma cantidad de números —eventualmente todos— seguía siendo constante, el premio variaba… y variaba para arriba. ¿En qué momento valdría la pena hacer la inversión? A Mandel le alcanzó con replicar el mismo algoritmo que había usado en su país natal. Una vez más, cuando supuso que había llegado 'el' momento, lo puso en práctica. No sé si usar la palabra 'casualidad', pero una vez más… ¡ganó!

Con mucho más dinero ahora, Mandel necesitaba radicarse en algún lugar en donde los premios fueran mayores, donde flu-

yera más dinero y, por lo tanto, la implementación del algoritmo resultara más complicada (porque había que comprar más números); aunque también la recompensa sería decididamente más importante. Su objetivo fue trasladarse a Australia. Consiguió visas para toda su familia y allí fue. Pero en el camino logró algo importante también: ingresar en el circuito de las loterías británicas, aprovechando la relación que siempre hay/hubo entre los australianos y los ingleses.

La *gran diferencia* que encontró es que, en lugar de tener que salir y comprar los billetes, los australianos permitían que cada persona pudiera imprimirlos en su casa u oficina. Para hacerlo, necesitaba impresoras láser, que si bien hoy son comunes, en aquella época eran muchísimo más caras y más difíciles de conseguir.

Eso no fue un impedimento. Mandel consiguió todo. Como el capital que tenía no le alcanzaba para comprar *todos* los números necesarios, su reputación le permitió conseguir 'inversores'. Eso es lo que le hacía falta, y los consiguió también. Por otro lado, más allá de las impresoras láser y las montañas de 'papel' para imprimir, necesitaba evitar duplicaciones, implementar un sistema de doble verificación para que no sobrara pero tampoco *faltara* ninguna combinación. Luego debía trasladarlos hasta los diferentes negocios que los recibían, los procesaban y se comprometían a entregar 'recibos' con la numeración correcta, para que sirviera como comprobante de cada una de las inversiones. En definitiva, si bien es un método exhaustivo, a usted (sí, a usted) no se le escapa que un 'error' en el diseño, impresión, distribución y entrega termina con el negocio… para siempre. Y por otro lado, determina la 'bancarrota' de muchísima gente.

Hay algo que no incluí antes: más allá de la posibilidad de que hubiera 'varios ganadores' con quienes debería compartir

el premio, entran en danza también las cuestiones impositivas. Cuanto mayor es el dinero a recibir, mayores son los aportes a los equivalentes de la DGI en cada uno de los países.

Es decir: para llegar a la jugada particular que 'merecía' que Mandel y su ejército de inversores (que llegaron a superar los ¡dos mil quinientos!) decidieran participar, debían hacer muy bien las cuentas sobre qué esperar y cómo diseñar la distribución de los números a imprimir en cada hoja. En sí mismo, ya era/es un arte que requiere de un extremo cuidado.

Con este método, Mandel logró ganar la lotería australiana… ¡doce veces! De hecho, hasta ese momento, Mandel no había hecho nada 'ilegal', pero las autoridades australianas decidieron modificar las 'reglas'. Primero, optaron por impedir que una sola persona pudiera comprar *todos* los billetes. Fácil: Mandel consiguió otras cinco personas a quienes hizo sus socias. Eso ya era suficiente, de acuerdo con la nueva reglamentación exigida por los australianos. Después, volvieron a 'correr el arco': ya no podían ser personas/individuos los que compraran todos los boletos: hacía falta que aparecieran compañías y/o corporaciones. Mandel decidió *constituir una firma dedicada específicamente a comprar billetes de lotería*.

Y así siguieron, unos y otros. Más restricciones de parte de las autoridades y más 'vueltas' que debía sortear el rumano. Hasta que llegó un momento en el que los obstáculos a eludir eran tantos que Mandel tuvo que detenerse: Australia ya no le servía. Como ya había conseguido la ciudadanía para él y toda su familia, comenzó a buscar en otros lugares en el mundo. Naturalmente terminó en el sitio que, intuyo, usted está pensando (¿no es así?, ¿dónde iría usted?). Bueno, yo, cuando llegué a este punto, pensé en Las Vegas, Nevada. O Atlantic City, Nueva Jersey.

Después de haber considerado Massachusetts (que pagaba 37 millones de dólares por nueve millones de combinaciones) y Arizona (11 millones de dólares por 5.100.000 combinaciones), finalmente se decidió por Virginia, que ofrecía ciertas ventajas, no menores, no despreciables. Recién acababa de ser implementada, los inversores podían comprar tantos billetes como quisieran y, encima, ¡los podían imprimir en sus domicilios particulares! Pero el dato más importante es que los seis números que conformaban el billete se elegirían desde el 1 hasta el 44 (en los otros estados, llegaban hasta el 54, con lo cual las combinaciones posibles se incrementaban muchísimo). Esto significaba que con seis números, había 'solamente' 7.059.052 combinaciones posibles, muchísimas menos que las más de 25 millones habituales.

Es por eso que, teniendo que pagar solamente *un dólar* por billete, Mandel necesitó (junto a sus coinversores) juntar menos de 7.060.000 dólares. Como se imagina, no lo detendría nada. La logística lo forzó a conseguir entonces 4.500 inversores (siempre en Australia). Pero además necesitaba que le permitieran jugar sin estar físicamente en Estados Unidos.

Logró todo esto, lo cual fue no trivial, porque cada uno de sus 'socios' tuvo que invertir 4.000 dólares. Más allá de las ventajas que describí antes, aún quedaban más impedimentos. Una vez impresos, el peso llegaba a casi… ¡mil toneladas! Por otro lado, ¿cómo haría para enviar todos los tickets desde Australia? La encomienda le costaría más de 60.000 dólares.

Aun así, supongamos que esa fue la parte fácil. Después, quedaban un par de puntos importantes:

a) ¿Cómo garantizar que llegaran a tiempo?
b) ¿Cómo *pagar* los billetes?

Lograr que llegaran no fue fácil, pero no tampoco la peor dificultad que enfrentaron. Entre una ‘jugada’ y otra, había tres días de diferencia. A usted no se le escapa que trasladar ‘cualquier objeto’ desde Sídney hasta Virginia requiere de una organización ‘ad hoc’, específicamente ‘hecha a medida’. No hay vuelos *directos y sin escalas* desde Sídney hasta Charlottesville. Por otro lado, Mandel necesitaba que le aceptaran ‘cheques’. Seguro que no pagaría en billetes (dólares), sencillamente porque eso sí hubiera costado una fortuna, no solo por el peso, sino también por el traslado, teniendo en cuenta todas las garantías de seguridad que se hubieran requerido. Entonces había que lograr que los negocios —habilitados por las autoridades norteamericanas al efecto— le aceptaran cheques. Y Mandel lo hizo. Logró cheques certificados, de manera tal que eso *tampoco* fuera un impedimento.

Y hasta acá llegué. Faltaba un último paso: que llegara la oportunidad para que el dinero en juego, de ganarlo, valiera la elaboración de toda la logística. Mandel y sus ‘socios’ tuvieron que esperar. Cualquier error era garantía de desastre[42] y, como está escrito, uno es tan fuerte como su eslabón más débil. Las cuentas indicaban que para que el operativo se iniciara, el premio debía superar los 20 millones de dólares, limpios, netos, luego de pagar *todos* los gastos, impuestos, traslados, impresiones, verificaciones

---

42. Mandel usó un nombre de fantasía (que están *tan de moda hoy*): Pacific Financial Resources. Y configuró un trust al que llamó International Lotto Fund (ILF). Con esos datos convenció a 2.524 inversores que pusieran *al menos* 3.000 dólares cada uno. Debido al éxito que había tenido antes, logró juntar más de 9 millones de dólares. En un galpón de Melbourne, se estableció con 30 computadoras y 12 impresoras láser. Contrató 16 empleados a tiempo completo e imprimió los más de siete millones de billetes. Lograrlo le llevó tres meses. Cuando terminó, el peso total orilló las mil toneladas. Los envió a Estados Unidos y pagó por el envío 60 mil dólares.

múltiples, etc. (y leyendo esta historia uno entiende cuántos etcéteras hay involucrados). Y así lo hicieron.

Cuando las cuentas le dieron por primera vez, un contingente de personas dirigidas por su socio Anithalee Alex en sus cuarteles generales[43] comenzaron con la tarea de la impresión, con el cuidado necesario para 'no errarle a ningún número que *debía* aparecer en cada combinación'. El equipo tuvo que trabajar produciendo 100.000 (¡CIEN MIL!) billetes por hora durante dos días. 48 horas sin parar. Al mismo tiempo, una vez presentados, organizaron los 'recibos' o 'comprobantes' en cientos de cajas.

Y cuando todo estaba funcionando de acuerdo con lo previsto… usted también intuye que 'algo' debió haber pasado. Si no… ¿en dónde está la historia? *¿Dónde está el drama?* Súbitamente, uno de los negocios receptores de los tickets dejó de funcionar. La computadora, a partir de un momento, ¡dejó de recibir más billetes! Y el problema comenzó a propagarse… Ya no solo era un negocio, sino que la computadora central pareció empacarse y no recibía más 'ingreso de datos'.

Las cuentas de Mandel indicaban que aún faltaba registrar más de un millón y medio de combinaciones. En total, entre

---

43. El 12 de febrero de 1992, tres días antes del sorteo, Alex se registró en el hotel Holiday Inn, en Norfolk, Virginia. Allí estableció su 'comando general' en un galpón cerca de un parque, el Koger Center. Alex preparó un equipo de 35 personas (la mayoría de ellas eran 'contadores') que terminaron distribuyendo paquetes de 10 mil tickets (o billetes) envueltos en papel celofán. Cada uno tenía adosado un cheque por 10 mil dólares certificados por el banco. Durante dos días completos, los enviados especiales llegaban hasta las estaciones de servicio y supermercados habilitados para recibir los billetes; entre otros, los más conocidos: Farm Fresh, Miller Mart y Tinee Giant. Los cajeros en cada uno de esos negocios recibieron y procesaron los millones de tickets generados algorítmicamente por una computadora.

todos los negocios, habían recibido un poco más de 5.500.000 de los 7.100.000 tickets, es decir, algo así como el 78% del total. Y ya no había más tiempo para nada. La peor de todas las situaciones posibles acababa de suceder. ¿Qué hacer?

Entonces… ¡el milagro! Sí, un milagro. Ya no había nada que pudiera modificar el destino. La extracción de los números que conformarían el billete ganador estaba a punto de comenzar y Mandel sabía (tanto como el resto de sus 'socios') que ahora *todo* quedaba en manos del 'azar'. Después de haber 'peleado' tanto para tratar de derrotarlo, para intentar doblarle el brazo, finalmente *todo, ¡literalmente todo! Quedaba reducido al azar.*

El día tan esperado fue el 15 de febrero de 1992. Ese día particular, el canal oficial de Virginia ofreció 'en vivo' la extracción de los números: 8, 11, 13, 15, 19, 20.

Y cuando no había nada más para *pensar*, sucedió el 'milagro'. Aun con más de un millón y medio de combinaciones afuera, la 'ganadora' se había filtrado. Como si alguien, en alguna parte, 'allá arriba' o 'acá abajo' se estuviera riendo de tanto esfuerzo.

Mandel ganó los 27 millones de dólares[44] a los que aspiraba si obtenía los seis números que necesitaba. Irónicamente el total superó ese número por lejos: en el camino obtuvo *todos los segundos, terceros y cuartos premios que se ofrecían*, llegando a superar los 30 millones de dólares.

El comisionado de la lotería de Virginia, Kenneth W. Thorson, hizo honor a lo que correspondía y si bien hubo varios en el estado que querían iniciarle un juicio a Mandel, la idea no prosperó

---

44. El total fue 27.036.142. Ese dinero lo obtuvo por haber conseguido el primer premio. Pero además, obtuvo seis segundos premios, 132 terceros premios y 135 premios menores. La historia completa está acá: https://thehustle.co/the-man-who-won-the-lottery-14-times

y el premio (o mejor dicho, *los premios*) fueron entregados y pagados como correspondía[45].

Final

Hoy, julio del año 2019, Mandel vive en una isla (llamada Vanuatu) en el norte de Australia. Su periplo terminó allí. Intentó en algún momento replicar el algoritmo en Israel, nuevamente, pero fue detenido acusado de fraude. Aunque esa ya es otra historia. Por ahora, y aparentemente por el resto de sus días, su objetivo es quedarse donde está. El azar, *agradecido*.

Referencias

- https://www.independent.co.uk/news/world/americas/how-to-win-lottery-romanian-mathematician-hacked-system-stefan-mandel-a8527556.html
- https://www.lotterycritic.com/news/lottery-winners/stefan-mandel-14-time-lottery-winner/
- https://www.dailymail.co.uk/news/article-6106541/Australian-mathematician-uses-secret-formula-win-lotto-14-times.html
- https://www.news.com.au/finance/money/wealth/sneaky-way-maths-whiz-managed-to-play-the-system-and-change-lotto-rules-forever/news-story/7ce9f29037a516ba88fd488d71713313

45. Mandel contrató a la firma Lowe Lippman para transferir los 7.100.000 dólares al Crestar Bank en Virginia. Esos dólares fueron divididos en cheques de 10.000 dólares cada uno. Pero también necesitó del nombre de *una persona* a quien enviarle todo el dinero, y finalmente lo logró, estableciendo una sociedad con quien terminó siendo su amigo: Anithalee Alex.

- https://www.thesun.co.uk/news/7121921/stefan-mandel-romania-lottery-money-system/
- https://www.businessinsider.com/how-to-win-the-lottery-2018-9
- https://www.quora.com/How-did-the-Australian-mathematicians-Stefan-Mandel-use-a-secret-formula-to-win-the-lottery-14-times



El ‘efecto verdad’. La ‘fluencia’

Alicia Dickenstein es una de las mejores matemáticas argentinas de la historia. Fue elegida en el año 2014 como una de las vicepresidentas de la Unión Internacional de Matemática, cargo que nunca ocupó ningún sudamericano, ni hablar argentino. Nunca. Fue la primera mujer elegida directora del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA, un verdadero lujo para el país. La historia que quiero contar tiene que ver con algo que me dijo hace muchos años, cuando sus dos hijos (Mariana, quien ya la hizo abuela un par de veces, y Alejandro) eran aún muy pequeños. Discutíamos sobre la televisión, qué ver y qué no, cuál es el rol de los padres, cuánta libertad dejarles, etc. La posición de ella fue tan singular que la he utilizado repetidamente cuando el tema es abordado en distintos foros y/o situaciones. Alicia me dijo: “Mirá, yo tengo un pacto con mis hijos: ellos pueden ver cualquier programa que quieran… cualquiera, pero tienen que decirme cuál es. No me preocupa la elección, solo quiero que *ellos tomen una decisión específica y que quieran* ***mirar algo en particular***. No importa qué programa sea, yo los voy a dejar, pero quiero que me digan cuál es, que lo hayan *elegido específicamente*. Lo que no quiero es que se sienten ‘a ver televisión’: eso no”.

Me pareció una posición distinta, porque no es una prohibición (en el sentido estricto) ni es otorgarles la libertad absoluta. Involucra también tener un gran respeto por sus voluntades pero con los límites propios que los padres establecemos o ponemos sobre nuestros hijos. Por supuesto, como todas las medidas que involucran decisiones sobre otras personas, son siempre opinables. Quizás a usted, que está leyendo este texto, no le hubiera parecido bien la determinación que ella tomó[46]; en todo caso creo que me aceptará que es una posición inusual.

Pero ¿de qué quiero hablar? La idea de presentar ese episodio acá la dispararon un par de artículos que leí recientemente en algunas revistas de psicología sobre temas que me quedan ciertamente 'alejados'. La pregunta que me hace 'ruido' es la siguiente: ¿cómo incide en una persona escuchar reiteradamente una falsedad?

Fíjese que solamente por el hecho de estar 'viviendo', no hay manera de *no* estar expuesto a escuchar y ver muchísimas cosas que uno no necesariamente elige. Es decir, caminamos embebidos en nuestros pensamientos, pero simultáneamente vivimos bombardeados por todo lo que sucede a nuestro alrededor. Una parte del tiempo tenemos conversaciones con quienes interactuamos. Otras veces elegimos escuchar, ver y/o leer algo específico, pero lo que me interesa enfatizar es que se trata una decisión personal: uno 'opta' por concentrar su atención en algo puntual. A usted no se le escapará que es imposible abstenerse también de escuchar/leer/ver lo que no 'decidió' o, en muchísimos otros

46. Si bien nunca le pregunté específicamente, estoy *segurísimo* de que Raúl (el marido de Alicia) coparticipó tanto como ella en la decisión que tomaron. Como los conozco bien a ambos, y sé el tipo de relación que tienen, no me cabe ninguna duda de que no fue una decisión unilateral.

casos, uno cree que está eligiendo aunque realidad está siendo 'elegido por otros'.

Yo sé que me estoy metiendo en un terreno resbaladizo y no pretendo presentarme como un experto (obviamente no lo soy), pero sí puedo ofrecer algunas ideas para pensar. Me explico: me interesa saber con cuánto espíritu crítico confrontamos lo que nos llega desde 'afuera'. ¿Aceptamos lo dicho? ¿Lo resistimos? Me imagino que su respuesta tendrá que ver con cuán informados estamos sobre el tema en cuestión, cuánto sabemos de él. Pero encontré algunos resultados sorprendentes. Me explico.

La idea que subyace detrás de las investigaciones de un grupo de psicólogos tiene que ver con cuánto modificamos nuestro criterio de 'verdad' en función de la 'repetición' con la que escuchamos (o leemos) un argumento. Funciona así: *Cuantas más veces uno encuentra que alguien* ***afirma algo****, más creíble le resulta,* ***¡independientemente de su veracidad!***

Como le debe estar pasando a usted, lo primero que pensé fue: "Debe tener que ver con temas de los que uno o bien no sabe nada o bien sabe muy poco", pero parece que no, que ni siquiera es así y, por supuesto, no crea que me excluyo y 'miro de afuera'. No, supongo que me debe pasar lo mismo que a la mayoría. Fíjese cuáles fueron los experimentos y qué fue lo que descubrieron.

Tomaron un grupo inicial de cuarenta personas que se prestaron a participar de la experiencia. Les advirtieron que el proceso consistiría de tres encuentros, separados por dos semanas cada uno. En el momento de la primera reunión, les entregaron un grupo de 60 'afirmaciones' sobre las cuales ellos debían juzgar qué valor de verdad tenían (ciertas o falsas); además, debían ponerles una calificación que iba de un *uno* (si para quien contestaba era ostensiblemente falsa) hasta *siete* (si el participante estaba convencido de que era cierto).

Voy a adaptar algunos ejemplos, como para entender que hay casos en los que las respuestas no parecen obvias. ¿Usted qué piensa?:

a) La primera base aérea de la Argentina se estableció en la ciudad de Palomar, en la provincia de Buenos Aires.
b) El remo fue reconocido como un deporte olímpico recién en 1946.
c) En la Argentina, en el año 1900 había solamente 120 escuelas públicas.

Dos semanas después, cambiaron 40 de las 60 preguntas y dejaron 20 del primer encuentro. Es decir, *repitieron* 20 de las afirmaciones que habían explicitado la primera vez. Por último, dejaron pasar dos semanas *otra vez* y volvieron a proponer 60 afirmaciones, *repitiendo las mismas 20 que en el primer y en el segundo encuentro*.

Lo notable es que el valor de verdad sobre esas 20 preguntas, ¡hechas a los mismos participantes!, fueron cambiando a medida que pasó el tiempo. En la primera evaluación que hicieron, el promedio de verdad fue de 4,20. Dos semanas después, esas mismas preguntas juzgadas por la misma gente aumentó su veracidad al 4,60. Finalmente, la tercera vez ya llegó al 4,70. Los psicólogos que hicieron la experiencia se ocuparon de aclarar que el resto de los hechos reportados no exhibieron ningún patrón visible, al menos para ellos.

Repitieron este tipo de modelo repetidamente con otros grupos y otras preguntas, y el resultado fue siempre similar. ¿Qué conclusión sacar de estos datos? Acá es donde ellos hablan de "El ilusorio efecto verdad": cuantas más veces uno encuentra que un cierto hecho es afirmado, más creíble le resulta, ¡indepen-

dientemente de su veracidad intrínseca! Es decir, cada persona pudo haber revisado, después de la primera vez, en la literatura si los hechos reportados eran ciertos o no, pero más allá de que algunos lo hubieran investigado, los resultados no cambiaron.

Con todo, uno (yo) tiene (tengo) la sospecha de que esto sucedió al juzgar o evaluar temas de los cuales uno 'sabe poco o nada'. Es decir, si uno tiene información sobre un cierto tema, debería *descartar la mentira y desconfiar del 'mentiroso'*. Sin embargo, a pesar de que me quise convencer de que debía estar leyendo mal, el artículo no deja dudas. El estudio publicado en octubre del año 2015[47] en la revista norteamericana *Journal of Experimental Psychology* exhibe algo inesperado (al menos para mí):

> En la vida cotidiana, uno encuentra repetidamente afirmaciones falsas que nos llegan en forma de avisos, propaganda política y rumores. La repetición parece ser la que genera errores de concepción instalando falsedades (como —por ejemplo— que consumir vitamina C previene contra los resfríos) y penetra en nuestra base de datos de (supuesto) conocimiento. El estudio demuestra que las afirmaciones repetidas consistentemente son más fáciles de procesar y, en consecuencia, se las percibe como más verdaderas que "nuevas" afirmaciones. Hemos asumido hasta acá que **el conocimiento repele este efecto** (por ejemplo, repetir que el Océano Atlántico es el más grande de los océanos no debería ser suficiente motivo como para creerlo). Los autores testearon esta suposición y descubrieron que sucedía lo contrario, algo totalmente inesperado. Aun cuando

47. "Knowledge Does Not Protect Against Illusory Truth" ("El conocimiento no protege contra la verdad ilusoria") fue publicado por Lisa K. Fazio, Nadia M. Brashier, Keith B. Payne y Elizabeth J. Marsh, en el *Journal of Experimental Psychology*, General, Vol. 144 (5), octubre de 2015, págs. 993-1002 (http://dx.doi.org/10.1037/xge0000098).

se les ofrecieron formas de cotejar la veracidad de lo que les era planteado, optaron por creer lo que se les decía sin hacer las verificaciones esperables. Es por eso que la conclusión que "sacamos" es que los participantes prefieren "negar" el conocimiento que tienen sobre algún tema o prefieren incluso aceptar lo contrario si les es más fácil de procesar.

El resultado de dos experimentos sugiere que preferimos ignorar el conocimiento de base que traemos a la mesa si nos es más 'fácil' recostarnos en aceptar lo que nos dicen. El grado de dificultad para entender algo (más fácil versus más difícil) es lo que se llama 'fluencia', y es en lo que se basa Daniel Oppenheimer en el artículo que aparece en la revista *Psicología Experimental*[48].

Afirmaciones que uno ha escuchado repetidamente son mucho más fáciles de procesar. Esta facilidad es la que nos lleva a una conclusión *falsa* y uno concluye que 'deben ser *más* verdaderas'. Aunque parezca descorazonador, esa es la conclusión central del artículo: independientemente de que uno *sepa* que no necesariamente es cierto lo que nos dicen, ¡tendemos a creerlo igual! Es más fácil creer algo que uno escuchó muchas veces, que sostener la posición contraria *aun cuando uno sepa, interiormente, que lo que está sosteniendo es falso*.

Apéndice

El primero de los experimentos involucró a 40 estudiantes (no graduados aún) de la Universidad de Duke, Carolina del Norte,

48. Lisa Fazio es psicóloga y trabaja en la Universidad de Vanderbilt (Nashville, Tennessee, EE.UU.). El artículo que menciono apareció en la revista *Journal of Experimental Psychology: General*.

Estados Unidos. Le presentaron a cada uno una lista de afirmaciones: algunas ciertas y otras falsas. La mitad del total eran de conocimiento popular, conocimiento 'básico', con la intención de que aquellas que fueran falsas resultaran bien evidentes. Entre las restantes, había varias cuya veracidad o falsedad no resultara tan obvia para lograr que el proceso de discriminación fuera más complicado.

Esa era la primera fase del experimento. En la segunda, les entregaron a los 40 que habían participado antes una lista de 176 afirmaciones —algunas de las cuales habían estado incluidas anteriormente— y les pidieron que las 'etiquetaran' en una escala que iba desde 'uno' (decididamente *falsa*) hasta 'seis' (decididamente *verdadera*).

Y para terminar, los mismos 40 participantes tenían que contestar una lista de (otra vez) 176 frases pero con el sistema de 'multiple choice'. Por ejemplo, una de las preguntas fue: "¿Cuál es el océano más grande que hay en la Tierra?", y les ofrecían tres alternativas: a) Pacífico (que es la verdadera); b) Atlántico (que era la respuesta *falsa* que se había enfatizado antes); y c) No sé.

Los investigadores determinaron que aquellas frases *falsas* que habían sido repetidas antes fueron aceptadas como ciertas *¡independientemente de que lo que cada uno hubiera sabido previamente!* Para ponerlo en términos un poco más brutales: *¡La repetición termina incrementando el valor de verdad, aún cuando esta repetición termine contradiciendo hechos que son bien conocidos!*

El ejemplo más notable de todos los que leí fue el siguiente: todos los participantes sabían que la 'gaita' es un instrumento que se usa en Escocia, característico de ese país. Sin embargo, cuando leyeron repetidamente que "*Sari* es el nombre del instrumento que se usa en Escocia", la mayoría terminó por cam-

biar de idea, *aun cuando sabían la respuesta correcta y la habían usado antes*.

Después de leer esta nota (y si le parece, haga las verificaciones que considere pertinentes), permítase dudar de lo que escucha, lee o ve (incluso de este propio artículo). Las vacunas *no* causan cáncer y, si bien repetir una falsedad no la transforma en verdad, puede que la/lo haga *pensar* que sí lo es.



¿Verdad?

Truth or Truthiness sería algo así como "Verdad o lo que *parece* verdad". Ese es el título de unos de los libros que escribió Howard Wainer[49]. Antes de compartir una de las historias que allí cuenta, quiero presentarlo con un breve extracto de lo que dijo en una entrevista reciente:

> Desde chico advierto que hay una situación que ni tiene sentido ni es sustentable. Hay una evidencia abrumadora de que en esta sociedad algunas personas se benefician *enormemente*, mientras que otras (la mayoría) no. Es imposible vivir en una sociedad con estas características, porque 'tarde o temprano', la gente que está en la parte de 'abajo' de la pirámide comenzará a protestar y a objetar el sistema, en forma pacífica primero y después de manera más violenta, sobre todo si no es escuchada… Creo que nos estamos acercando a esas instancias. *Hay un grupo de personas que tienen 'casi' todo y que increíblemente cada vez tienen MÁS. Por el otro lado, el resto*

49. Howard Wainer es un matemático norteamericano, profesor en la Universidad de Pennsylvania, autor de veinte libros sobre estadística y más de cuatrocientos artículos en revistas especializadas. Es una de las palabras más respetadas en el mundo y sus columnas trimestrales ("Visual Revelations" o sea, "Revelaciones visuales") en *Chance* son y han sido las más leídas de la revista durante los últimos veinticinco años.

> *de las personas, la enorme mayoría que tiene ‘poco’, cada vez tiene MENOS…* Cualquier persona racional advierte que esto *no puede durar: va a reaccionar (o lo está haciendo) y en forma más seria.*

La traducción —quise fuera literal— esconde la pasión con la que fueron dichas, y posiblemente yo no sea capaz de transmitir la potencia de su alocución. Pero ciertamente que alguien en Estados Unidos, con semejante reputación, se apure a mostrar la incongruencia e INJUSTICIA de sociedades como las nuestras, no creo que llame la atención. O en todo caso, no debería.

Más allá de escucharlo y leer algunos de sus libros y artículos, me parece que valdría la pena exhibir la potencia de alguno de sus razonamientos. Lo que sigue es una versión libre mía de un artículo que publicó en la revista *Chance*, y que luego apareció en el libro que mencioné antes: *Truth or Truthiness*.

Se trata de dos historias que parecen desconectadas, pero verá que al final no es así. Tengo un par de cosas para proponerle antes de embarcarse en la lectura:

a) Mientras vaya leyendo, piense qué conclusiones sacaría (si es que alguien se las pidiera), qué es lo que usted daría como *cierto* y después, verá que ‘esa’ verdad no es lo que *parece*. Más aún: ¡no es *la* verdad!

b) Los dos ejemplos que usted va a encontrar más abajo, tienen que ver con dos temas que no son habituales, al menos para mí e intuyo que para las grandes mayorías: competencias de *atletismo* y *música clásica*. De todas formas, los detalles son irrelevantes, lo que sí importa es el mensaje subyacente. Acá voy.

Como escribí antes, es muy probable que usted —como me pasa a mí— no esté familiarizado con el atletismo y las marcas mundiales. En todo caso, leo o sigo lo que sucede en los 100 metros llanos, aunque más no sea por todo lo que representa la figura de Usain Bolt, el jamaiquino quien desde hace muchos años es el hombre más rápido del planeta. La presencia de Bolt en cualquier competencia *obliga* a prestar atención. De todas formas, hasta allí llego. Si alguien me detuviera y me preguntara cuál ha sido la evolución del hombre en los últimos cien o ciento cincuenta años, o cuánto más rápidos somos como 'especie', podría balbucear algunas vaguedades. Diría:

> Supongo que con las nuevas técnicas de entrenamiento, las nuevas dietas, la preparación física, atlética, médica y psicológica, el descanso… con la nueva aparatología, las estrategias de recuperación, las cámaras hiperbáricas, los instrumentos que sirven para la medición de las fibras musculares… con las mejoras en la nutrición, los suplementos vitamínicos, las nuevas drogas (legales o no), etc., sería natural esperar que hayamos mejorado *todas* las marcas mundiales en el último siglo.

Supongo que usted se sentiría satisfecha/o con una respuesta parecida, ¿no es así? Ahora, acompáñeme en lo que reseña Howard Wainer.

Consideremos el tiempo en el que el hombre recorre una *milla*. Una digresión: curiosamente las competencias mundiales de relevancia se miden con el sistema métrico decimal: 100 metros, 200 metros, 400 metros, 800 metros, 1.500 metros… los diferentes maratones se miden en kilómetros, etcétera. Pero la ***única*** competencia *importante* que se mide en otras unidades es 'la milla'. Me apuro en escribir que una mi-

lla es un poco más que 1.600 metros, casi 1.610. Ahora, mire lo que sucedió.

El primer registro existente corresponde al año 1855, y el corredor más rápido para 'la milla' fue el británico Westhall: 4 minutos y 28 segundos. Sin embargo, voy a empezar el análisis en el siglo XX porque desde ese punto los datos ofrecen el rigor de haber sido controlados por la misma entidad (la Federación Internacional de Atletismo) y, por lo tanto, las mediciones están hechas usando la misma 'vara'.

El hombre más rápido del mundo en ese momento (en correr la milla) fue el norteamericano John Paul Jones. Su tiempo fue de 4 minutos y 14 segundos y lo estableció en mayo de 1913.

En promedio y haciendo las aproximaciones necesarias, el record mundial fue 'mejorando' alrededor de cuatro décimas de segundo por año desde ese momento. Los récords iban bajando, pero *nadie* lograba quebrar los *cuatro minutos*. Esa barrera se transformó en algo así como una 'obsesión'.

Tuvieron que pasar más de cincuenta años para que el británico Roger Bannister lograra lo que parecía imposible. El 6 de mayo de 1954, en Oxford (Inglaterra), exhausto y sin poder levantarse de la pista ni bien cruzó la línea de llegada, Bannister logró el *milagro*: había corrido la milla en 3 minutos 59 segundos y 4 décimas.

Yo sé que usted estará pensando: ¿a mí que me interesa todo esto? Téngame un poquito de paciencia y verá el ángulo que propone Wainer.

Sigo. Diez años más tarde, el récord de Bannister fue pulverizado por todos lados. De hecho, para ponerlo en *sus propios términos*, alumnos de colegio secundario corrían la milla en menos de cuatro minutos. ¿Qué pasó? ¿Es que de pronto *el hombre mejoró tan brutalmente su condición física, mental y atlética*? De

hecho, justo sobre fines del siglo XX, en julio de 1999 en Roma, el marroquí Hicham El Guerrouj estableció un nuevo récord mundial: 3 minutos, 43 segundos y 13 centésimas de segundo. Esta marca todavía persiste hoy, octubre del año 2018.

¿Y entonces? ¿Cómo contestar la pregunta? Por supuesto, como escribí antes, toda la parafernalia que trajo el profesionalismo se puso a disposición de mejorar la alimentación, nutrición, dieta, descanso, tipo de entrenamiento, aditamentos vitamínicos, drogas (permitidas o no), etc.; pero aun así hay todavía *algo* que hace ruido: ¿fue para tanto? Sí… ¡y no! ¿Qué pasó que el hombre pudo bajar los tiempos en forma tan sistemática y hasta 'casi' brutal? De un récord de 4 minutos y 14 segundos, pasamos a otro de 3 minutos y 43 segundos. ¡Es más de medio minuto! Pero nos llevó cincuenta años bajar 14 segundos. ¿Qué ocurrió después?

Acá es donde entra Wainer. Basta con recorrer un poco la lista de nombres (y sobre todo las *nacionalidades*) de quienes batían los récords. En principio, figuraban únicamente los británicos. Después, se agregaron los norteamericanos. Siempre hay europeos, pero hubo años de dominación sueca, sobre todo durante la Segunda Guerra Mundial. Se agregan finlandeses y llegan los neozelandeses, australianos, algún francés y, claro está, los nacidos en las Islas Británicas. ¿No le dice *algo* todo esto? ¿No quiere pensar qué *patrón* emerge de los nombres de todos estos países?

Quiero 'corroborar' junto a usted que lo que está pensando es correcto. Fíjese que recién en 1975, en Kingston, la capital de Jamaica, se *filtra por primera vez* un nombre (Filbert Bayi) y un país (Tanzania) que no había aparecido nunca antes. Tanzania es un país africano, ubicado en el este del continente negro con casi 1.500 kilómetros de costa que orilla el océano Índico. Tan-

zania tiene más de 52 millones de habitantes, casi diez millones más que la Argentina. Pero ¿por qué escribo todo esto? Durante más de cien años no es que las competencias censuraban o no invitaban un país… ¡No! *¡Ignoraban todo un continente! ¡Toda África no participaba!* Todos los que obtuvieron los récords de la milla hasta entonces salían de un grupo de atletas que no superaban el millón, en lo que se consideraba 'el mundo', al menos hasta ese momento.

Ni bien aparecieron los africanos, los récords se pulverizaron. Claramente no es lo mismo ser el mejor de mil millones (que se suponía que era la población mundial a comienzos del siglo XX), que el más rápido entre más de siete mil millones, como somos hoy, especialmente si nos incluimos a todos y no dejamos a un continente entero 'afuera'.

Tanto es así que, ahora que nos incluimos todos, esa marca permanece estable: las técnicas siguen mejorando, los entrenamientos también y toda la sofisticación resulta abrumadora; sin embargo, el récord de la milla permanece estable: hace veinte años que permanece inmutable. Lo sigue ostentando el mismo marroquí Hicham El Guerrouj, quien lo logró en Roma, el 7 de julio de 1999.

El impacto fue/es tan brutal que aparecieron muchas más conclusiones totalmente inesperadas. Está claro que subsumidos en la pobreza, la mayoría, por no decir *todos* los países africanos, ni siquiera tenían idea de los Juegos Olímpicos que sucedían en el hemisferio norte. ¿Es que alguien que viviera en Tanzania o en Kenia o en Nigeria o en Mozambique (por poner algunos ejemplos) podía siquiera imaginar que terminaría viajando decenas de miles de kilómetros para correr 15 minutos, por más que fuera para batir un récord mundial?

Y quiero traer explícitamente el ejemplo de Kenia. Cuando

los keniatas comenzaron a participar, en particular lo hicieron los miembros de un grupo étnico (me resisto a usar la palabra 'tribu', pero la estoy usando de todas formas, perdón) conocido con el nombre de kalenjin. Sus integrantes no llegan a los cinco millones de personas, al día de hoy. ¿Por qué mencionar este grupo en forma *separada*? Son tan pocos que representan el 0,0005 de la población mundial. De nuevo, y le propongo que lea bien su inserción en el mundo: 5 diez milésimos de la población mundial. Sin embargo, los kalenjin ganaron el 40% de las competencias mundiales de atletismo en donde lo que se mide es 'velocidad y resistencia'. Por las dudas, ¡40 por ciento de *todas* las pruebas!

Naturalmente, esto abre una discusión totalmente diferente —y ciertamente incómoda— porque ¿quién empieza a 'tirar del hilo' que estos números representan? Por ahora dejémoslo para otro momento, pero usted advierte que hay muchísimo para discutir, tratar de comprender y no tener miedo a hacer preguntas en donde intervenga la genética. Llamaremos a los más capaces (Alberto Kornblihtt, por ejemplo) para que nos ayude a entender, pero seguramente esa será *una visión*. Necesitamos *otras*. Claro, no ahora.

Dicho todo esto, los keniatas en general no participaron de los Juegos Olímpicos hasta 1956. Tres juegos más tarde (o sea, doce años después), sus atletas ganaron tres medallas de oro y desde entonces coleccionaron ¡68 medallas olímpicas en atletismo! Creo que no hay muchos más datos para aportar a la discusión.

Pero no terminé… aún.

El argumento de Wainer no empieza (ni termina) en el análisis de quiénes son los que corren más rápido una milla. Mire lo que sucedió con la música y en particular con los concertistas (de piano). El director de la sección dedicada a música clásica dentro del diario *The New York Times* es el prestigiosísimo Anthony Tommasini. Hace muchísimos años que su columna dominical es la más leída 'dentro del ambiente'. Ese es el respeto que generan sus textos: el 'mundo' (de la música, se entiende) espera su visión, su opinión.

Justamente, el domingo 14 de agosto del año 2011, Tommasini escribió un artículo con un título provocador: "Virtuosos Becoming a Dime a Dozen", algo así como "Los virtuosos hoy se consiguen más baratos por docena". No es la traducción 'literal' pero da una idea de lo que quiso decir.

Tommasini describía, genuinamente sorprendido, el incremento brutal de la cantidad de músicos jóvenes, concertistas de piano, que mostraban una técnica individual exquisita. El número de pianistas con esas habilidades había aumentado en forma descomunal. ¿Qué estaba pasando?

Y no solo eso. Los concertistas más reconocidos de esa época (alrededor de 2011) exhibían una técnica que les permitía abordar *cualquier pieza, de cualquier autor y del grado de dificultad que sea*. Parecía no haber escollos: todos estaban en condiciones de ejecutar *toda pieza que se les pusiera delante*.

Naturalmente, para sacar ese tipo de conclusiones, necesitaba comparar esa situación con lo que había sucedido hasta allí. De hecho, recurría al nombre de uno de los virtuosos del pasado, el famoso Rudolf Serkin, a quien señala como poseedor *únicamente* de la técnica suficiente para 'tocar' las piezas musicales que le

interesaban o le eran significativas. Por caso, Serkin no tenía en su repertorio el Tercer concierto para piano de Prokofiev o la poderosa Sonata en si menor de Liszt. Las evitaba para no exhibir sus vulnerabilidades. Sin embargo, Tommasini recalcaba: "Los virtuosos de hoy no tendrían ningún problema en hacerlo. No hay obra que se les resista".

Entonces, dejaba 'picando' una pregunta que no intentaba contestar: "¿Por qué? ¿Por qué antes no se podía y ahora sí?".

Y aquí es donde de nuevo entra Wainer. Una vez más, lo hace involucrando el tamaño (cantidad) y calidad de la muestra, de la población de la que surgen los pianistas de hoy.

> Mirando la lista en donde figuran los nombres de los pianistas más importantes del mundo, es muy fácil advertir que aparecen apellidos que *nunca* hubieran figurado en los programas del Carnegie Hall (por poner un ejemplo). Nombres como Lang Lang (China), Yundi Li (China), Zhang Zuo (China), Haochen Zhang (China) y Yuja Wang (China) están entre los diez mejores del planeta.

Antes los chinos no figuraban, no eran invitados, estaban 'fuera' de la competencia internacional. Sigue Tommasini:

> En la actualidad, es esperable un nivel de excelencia por parte de los pianistas más jóvenes. Lo veo no solo en el circuito de los conciertos sino también en los conservatorios y los colegios. En los últimos años vivo "impactado" por el maravilloso nivel técnico que poseen. De hecho, si hoy el propio Rudolf Serkin quisiera entrar en una de estas competencias, ¡no podría superar el corte para que lo dejaran participar! ¡Decididamente, no estaría entre los mejores candidatos!

Ahora, vuelvo yo. Truth or Truthiness, la 'verdad' o lo que 'parece verdad'. Invita a reflexionar si las conclusiones que hemos sabido conseguir son 'verdaderamente verdaderas', son simplemente *parecidas a la verdad* o, en todo caso, a lo que nos *gustaría que fuera la verdad*.

Si llegó hasta acá, usted compartirá conmigo que en el caso de la milla o los concertistas y/o virtuosos tenemos algunas respuestas posibles. ¿En qué otras áreas nos estará faltando 'actualizar' la muestra?

Memoria

Tengo una pantalla en blanco que 'me observa'. Tengo una idea que quiero desarrollar, pero no sé en qué dirección voy a ir. Me produce un poco de vértigo, porque tiene una componente que no quiero ignorar. Me voy a meter en un terreno en donde hace mucho tiempo me propuse (explícitamente) no entrar. Voy a violar un pacto conmigo mismo y, por lo tanto, tengo *miedo* de lo que salga.

En realidad, como no hay nadie que esté mirando lo que escribo, y los pactos (o acuerdos) fueron únicamente conmigo mismo, no voy a 'fallarle' a nadie; en todo caso, me fallo a mí. Pero no quiero ser tozudo o 'cabezadura' y no advertir que quizás, si no lo hago, me pierda la oportunidad de *aprender* algo. Y no quiero.

Me explico.

En general, *todo* lo que tiene que ver con la matemática que se enseña (o ha enseñado) en los colegios/escuelas a lo largo de los años, contiene una componente de memorización. Es decir, se trate de las tablas de multiplicar, las fórmulas más conocidas (para resolver ecuaciones de segundo grado), el cuadrado de la suma, la diferencia de cuadrados, las memorizaciones de varios teoremas (Pitágoras, por ejemplo), etc., en *alguna* parte aparece una componente que es la *memoria*. Y es allí en donde mis puertas se han cerrado históricamente: ¡no quiero participar de nada

que tenga que ver con algún detalle, aunque sea *mínimo*, que requiera de la utilización de la memoria!

Sin embargo, hace unos días estuve escuchando la charla de un matemático británico muy joven, Adam Kucharski. Ya había leído su libro (o al menos *uno* de sus libros) *The Perfect Bet*, algo así como “La apuesta perfecta”. El libro es fascinante y contiene maravillosos ejemplos de la vida cotidiana en donde el azar *empieza* a tener cada vez menos incidencia en las decisiones que tomamos. Es decir, si uno no tuviera ni conociera la teoría de probabilidades y estadística, si uno *no supiera* nada, entonces *todo terminaría siendo una sorpresa*. Por ejemplo, un caso muy concreto (y muy sencillo) sería el siguiente: si no supiéramos que, al tirar una moneda, la probabilidad de que saliera cara (o ceca) es de ½, o de un 50% si usted prefiere, entonces cada vez que arrojáramos repetidamente una moneda al aire, su resultado sería inesperado para nosotros: podrían aparecer múltiples caras seguidas, o uno podría sospechar qué debería salir o cualquier otra variante que se le ocurra. Sin embargo, en alguna parte está tan embebida en nuestra cultura (ahora), que en el ‘largo aliento’, si uno tirara una moneda mil o cien mil veces, la *expectativa* es que se distribuyera por mitades, aproximadamente. Es decir, *conocer* que la probabilidad es ½ coopera con la expectativa que tenemos.

Lo mismo podríamos decir respecto de un dado o, para dar un paso un poquito más sofisticado, si estuviéramos jugando a la ruleta. La moraleja de todo esto es más o menos inmediata: “La ciencia está cooperando para que el factor ‘suerte’ tenga menos incidencia en NUESTRA expectativa”.

Por supuesto, no aspiro a convencerla/o de que la suerte *ha desaparecido* o *desaparecerá*. ¡Obviamente, no! Más aún, el azar jugará *siempre* un lugar central en todos los juegos (de este tipo), pero la ciencia educa… y, de hecho, ese es un tema ciertamente *no menor*.

Con el avance de las bases de datos, la memoria que uno puede almacenar permite tener expectativas respecto de lo que uno puede suponer que pasará en *algunos juegos que ya no sean esencialmente derivados del azar*. Por ejemplo, incluso jugando al ajedrez, en donde uno supone que el azar tiene una incidencia mucho menor, o analizando los comportamientos de diferentes jugadores en un partido de básquet o de tenis, o al patear penales en partidos de fútbol… todos estos casos ahora tienen un factor extra que no existía hasta hace no mucho tiempo.

Aún no logré abordar el tema que me interesa: ¡la memoria! Y confieso que no sé, a esta altura, si lo que voy a escribir se compadece con lo que expliqué. O sea, quiero advertirle que, incluso leyendo el texto que sigue, usted puede no terminar asociando lo que leyó hasta acá con lo que va a figurar a continuación: ¡no sé! Pero no voy a forzar una ligazón entre ambos, sino que estoy compartiendo con usted lo que me está pasando a mí, en tiempo real, 'mientras me está sucediendo'.

En una conferencia que Kucharski dio el 1° de junio del año 2016, promocionada a las siete de la tarde, en Londres, puso en el pizarrón el siguiente número:

610260100091

Luego le pidió a la audiencia que se fijara en el número (que aparecía muy grande en una pantalla) y le dio un minuto para que lo pudieran registrar, como dijo él, *de* ***alguna*** forma.

Yo también quise hacerlo, pero no tuve demasiada suerte. Después de quitarlo de la pantalla, Kucharski preguntó si había algún voluntario. Varios se ofrecieron. Eligió uno y le pidió que lo repitiera. El joven que se había ofrecido repitió el número, pero se equivocó sobre el final: en lugar de 9 dijo 8 como penúl-

timo número. Yo, que había estado atento, *sabía* que no había ningún 8, pero no recordaba nada más que eso.

Kucharski preguntó si otra persona quería intentarlo, y así fue como *alguien* dijo el número correctamente. Lo notable es que no fue diciendo los dígitos *uno por uno*, sino que los mencionó así:

610 260 100 091

Es decir, los reprodujo en grupos de tres. Por supuesto, era el número correcto y la metodología que había usado el joven parecía muy atractiva (y eficiente).

Allí fue donde Kucharski agregó algo que me pareció muy interesante y que es —parte— de lo que quisiera compartir con usted: "Los estudios hechos a los efectos de 'medir' cuántos dígitos puede reproducir de memoria una persona *promedio*, se aproximan a los siete". Es decir, una persona 'común', como usted o como yo, debería poder, en un plazo razonable (menos de un minuto, para encuadrarlo como hizo él), reproducir un número compuesto por *siete* números. Lo que *no* dijo es que esos números que una persona puede reproducir están compuestos *únicamente* de *siete* ***dígitos***. En todo caso, uno puede reproducir siete 'números' más pequeños o siete 'unidades'. De hecho, es lo que nos permite (a los humanos) recordar/reproducir los números de teléfono que, en la mayor parte del mundo (al menos en las ciudades más grandes o más pobladas), están compuestos por *siete* dígitos.

Inmediatamente, ofreció un ejemplo muy característico y muy interesante: en Francia, los números de teléfono vienen separados… ¡de a pares! Le propongo que usted verifique este dato por su cuenta porque resulta muy llamativo. De hecho, me

permitió contestar una pregunta que me había hecho hace un tiempo: ¿por qué presentan los números en las tarjetas de los restaurantes, o de los hoteles, o en las publicidades en las calles o en las estaciones de trenes, o las líneas aéreas —por mencionar solo algunos casos— *separados* en pares de dígitos?

Iran Air	+33 (0) 1 43 59 69 06
Pegasus Airlines	+33 (0) 1 70 70 07 37
Alitalia	+33 (0) 1 56 93 18 39
Avianca	+33 (0) 1 44 50 58 60
Air Europa	+33 (0) 1 42 65 08 00

Vietnam In Paris

4.4 ★★★★★ (167) · $$ · Vegan

48 Rue de Cléry · + 33 1 74 64 92 18

Closed · Opens 7:30PM

Cozy · Casual · Vegetarian options

In bocca al lupo

4.6 ★★★★★ (319) · $$ · Italian

14 Rue Francœur · + 33 1 42 64 57 92

Closed · Opens 7:30PM

Cozy · Casual · Vegetarian options

Le Caulaincourt

4.6 ★★★★★ (117) · $$ · Restaurant

62 Rue Caulaincourt · + 33 1 42 59 42 55

Opens soon · 7PM

Great cocktails · Cozy · Casual

Como usted puede advertir, elegí en forma aleatoria números de teléfonos de restaurantes (tres) y de líneas aéreas (sin particular orden de preferencia) para mostrar que los franceses, interpretando perfectamente lo que decía Kucharski, ofrecen los números divididos de *a pares*, de manera tal de facilitarle a una persona la posibilidad de recordarlo.

Más allá de seguir con más ejemplos *de lo mismo* quiero volver por un instante al número original que había aparecido en la pantalla:

610260100091

Kucharski hizo una afirmación que en su momento me pareció *atrevida*: "Verán que este número en particular lo van a recodar ***sin ninguna duda*** más tarde cuando lleguen a sus casas o donde quiera que vayan hoy por la noche". ¿Por qué?

Fíjese en lo siguiente: de vuelta el número y en lugar de leerlo de izquierda hacia la derecha, léalo de derecha a izquierda. Lo voy a escribir:

190001062016

Lo voy a dividir en diferentes *unidades o trozos*:

1900 0106 2016

Ahora, aunque no haga particular necesidad, voy a *agregar* algunos signos de puntuación:

19:00 01/06 2016

¿Le sugiere *algo* esta forma de escribir o describir el número?

Es muy posible que usted pueda detectar un 'patrón': *¡es la hora, día y fecha de la charla a la que estaban concurriendo!* Es decir, las 19 horas (las siete de la tarde), del primer día de junio del año 2016. ¡Y eso es todo!

Antes de avanzar, me imagino su cara, como si me estuviera diciendo: ¿en serio? ¿Cómo se me iba a ocurrir utilizar *todo* este procedimiento, desde invertir el orden de la lectura, separarlo en diferentes 'unidades', agregarles signos de puntuación y, encima, que coincida justamente con el horario, día y fecha de la conferencia? Me apresuro a decirle: ¡tendría razón! Yo diría lo mismo y me hubiera pasado lo mismo.

Pero lo que *sí* puedo agregar a esa frase, es que me ha dado (y quizás a usted también) la posibilidad de incorporar *algún* tipo de estrategia, si es que uno quisiera o tuviera que *recordar* algo.

Un par de agregados más. Creo que fue Eduardo Dubuc (otro matemático argentino extraordinario) quien me contó hace muchos años que en la antigüedad (así, tan indefinido y ambiguo como lo que cada uno de nosotros podría interpretar como 'antigüedad'), al no tener la posibilidad de *escribir*, y por lo tanto *reproducir*, se solían escribir textos en *poesía*, de manera tal que eso permitiera recordar el supuesto *mensaje*. Es claramente más fácil recordar una poesía (más allá del tiempo que haya que invertir) que un texto escrito en prosa: ¡de eso no tengo ninguna duda!

Al mismo tiempo, esto invita a pensar que si uno tuviera que recordar una secuencia numérica, tratar de encontrar *algún tipo de patrón subyacente* sería una alternativa muy valiosa para considerar. Por supuesto, cada persona *individualmente* elegirá *algo* que le permita recordar, pero eso era previsible. Cada persona le agregará un estilo o historia particular que para otros, por no decir el resto del mundo, no le significaría nada más que confusión

y distracción. Pero, como *metodología*, vale la pena comprender el *valor agregado*.

Más aún: hay personas que suelen recordar una 'tira' de números (creo que el récord está en alrededor de mil números consecutivos) adjudicándoles una suerte de *historia*, agregándole *personajes* a cada número (o secuencia de números), lo que les permite fabricar algo 'novelado' y más fácil de retener. No creo que ninguno de nosotros esté en esa posición, pero, ante cualquier eventualidad, es *algo* más para tener en cuenta.

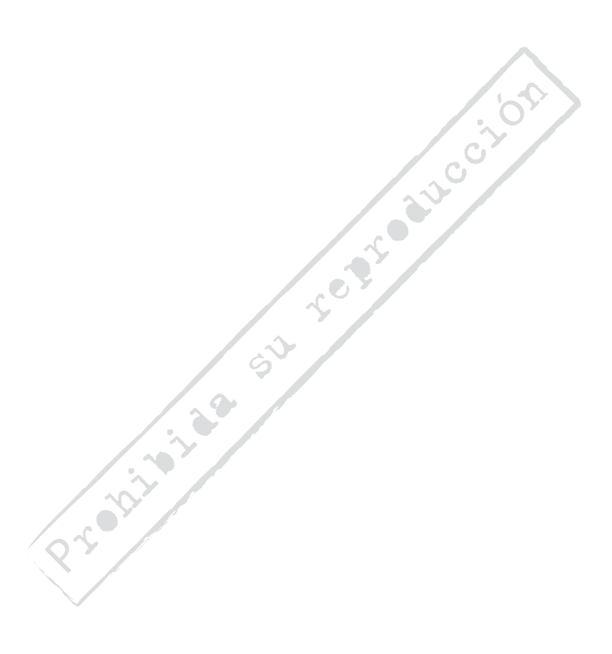
Para terminar con esto, lo que sucede es que uno no recuerda un número o conjunto de números, recuerda un ¡evento!, *algo* particular que tiene un significado personal, intransferible (en general) y único.

Final

¿Por qué quise contar esta historia? Como escribí antes, no soy muy afecto a recordar *nada* de memoria. Me produce *escozor* tener que involucrarme en cuestiones de este tipo. Dicho esto, muchas veces en mi vida, como es muy posible que le haya pasado a usted también, queriendo o no, voluntariamente o no, *tuve* que recordar algo. Tener una *idea* que sustente la posibilidad de hacerlo o un *método* que provea *alguna herramienta* será siempre bienvenido.

Cuando era más joven, me preciaba de recordar casi 200 números de teléfonos de memoria, sobre todo de aquellos atletas y/o profesionales cuyo acceso necesitaba por mi profesión. Hoy, estoy *muy lejos* de poder recordar, no digamos 200, sino ya 20. De todas formas, recuerdo libretas de teléfono que teníamos en la radio en la que trabajaba y, claramente, guardábamos un registro escrito de toda esa información. Hoy, con la tecnología

disponible, intentar recordarlos parece un esfuerzo totalmente inútil. Sin embargo, ahora estoy convencido de que ¡no es así! Y si necesitara recordar algo, me gusta saber que tengo/tendría una herramienta con la que no contaba antes, al menos como una *abstracción.* ¿Usted qué piensa?



Bitcoins

Introducción

Lo que sigue es una serie de ideas que intentan describir qué son los *bitcoins*. No sé usted, pero yo vengo escuchando hablar del 'mundo bitcoin' desde hace un tiempo, y toda la información que me llegaba me resultaba entre *confusa* e *incomprensible*. Por supuesto, es mi culpa. Con el afán de no invertir ningún esfuerzo en tratar de entender, o de tratar de entender sin hacer el menor esfuerzo, mi frustración se fue incrementando. Más aún: sospecho que *este tema* terminará siendo (si no lo es 'ya') *sumamente importante en nuestras vidas futuras*. Y aunque sea nada más que por esa razón, ya me produce curiosidad y ganas de estar informado.

Pero hay *otra cosa* que es lo que suele 'empujarme' interiormente: estar frente a algún tema (de mi interés, claro está) que origina algún tipo de controversia, dilema ético, o que requiere de un tiempo de reflexión para decidir de qué lado estar. Dicho de otra forma, ¡situaciones en las que no sé lo que pienso! Cuando esto me sucede, cuando no sé qué posición tomar, me fastidia *no educarme lo suficiente*. En todo caso, quisiera poder invertir u ocupar buena parte de mi vida (lo que me queda de ella, ya que

no soy 'tan joven') en ilustrarme en temas sobre los que *no tengo una opinión formada*.

Aunque en realidad me sucede algo peor. Como no tengo la información adecuada, solo el mínimo indispensable, como no leí lo suficiente para entender, únicamente lo necesario para *sacarme el problema de encima*, me dejo llevar por la impresión del momento, porque escuché/leí algo que me interesó o porque me siento cómodo acompañando lo que dijo alguna persona que valoro. Por lo tanto, al escucharla (o leerla) me resulta tentador creer que 'ya entendí'. Y como usted advierte, esta manera de proceder no parece una buena fórmula para defender una postura.

El tema de este capítulo es solo un ejemplo de los miles que me interesan. En este segmento del libro encontrará un poco de información sobre los bitcoins. Le pido que no espere, después de leer este texto, tener una idea concreta de qué son los bitcoins, cómo se usan, quién los diseñó, a quién le conviene que esta tecnología se distribuya y también a quién *no* le convendría. No, no aspiro a que eso suceda. Pero lo que *sí* me propongo es comunicar lo que me fue pasando a mí, compartir con usted la evolución que fui experimentando a medida que incorporé más información y comencé a familiarizarme con la terminología más básica. Después me capturó el interés que me fue despertando interiormente hasta terminar *fascinado*. Más allá del éxito futuro que puedan tener los bitcoins, hay 'algo extra' que es mucho más importante: la tecnología de las *blockchains*. Esa sí que —me parece— llegó para quedarse. Préstele particular atención.

Por último, no se preocupe si todos estos nombres (bitcoins, blockchains, etc.) le resultan foráneos. Sería muy extraño que todo le resultara *natural* en una primera lectura. Mi objetivo es que —al leer este texto— se sienta un poco mejor preparada/o para entender de qué se trata. Tendrá una idea de qué hablan los

que quieren usar la tecnología de las blockchains y, en todo caso, los bitcoins serán simplemente un *ejemplo* más. Estoy convencido de que podrá usar lo que lea acá como 'disparador', tener una idea más cercana sobre qué son y, principalmente, dónde buscar más y mejor información.

Espero que disfrute de este texto tanto como yo al escribirlo. Eso sí: me importa que sepa que me llevó muchísimo tiempo acceder aun a esta educación primitiva y elemental. Si pudiera proponerle algo, le diría que usted también se permita avanzar y retroceder, detenerse para pensar. En algunos momentos, quizás le pase como a mí: cuando creí que había entendido, apareció 'algo diferente' que me hizo sospechar que lo que creía cierto en realidad no lo era. ¿Por qué no intentarlo? Verá que al final habrá valido la pena.

A los efectos prácticos, más allá de esta introducción, dividí la información en cuatro partes. Acá voy.

Parte 1

No sé si usted tuvo la oportunidad de volar en avión alguna vez. En cualquier caso, desde hace ya bastante tiempo que uno consigue sus pasajes *sin tener ninguna copia física, ningún cupón, nada…* Uno llega al aeropuerto y cuenta con que, solo presentando el documento, la compañía aérea encontrará en su base de datos todo lo que necesita: código de reserva, número de vuelo, tipo de clase en la que viajará, asiento, tiempo de espera en cada aeropuerto, combinaciones con otros vuelos, etc. Estos son los datos más obvios.

Además, si la persona que trabaja para la aerolínea detrás del mostrador tuviera algún interés, podría explorar *su historia par-*

ticular: en qué compañías ha volado, cuántas millas recorrió, cuántos tramos pagó y cuántas veces usó los puntos que fue acumulando, cuáles son sus destinos favoritos, cuántas veces viajó acompañada/o, cuánto tiempo por adelantado hizo su reserva… la lista podría seguir. Me detengo acá solo porque quiero arrancar para otro lado, pero me imagino que usted entiende qué es lo que quiero decir: si hubiera alguien interesado en conocer esta parte de su historia, no le costaría mucho acceder a ella.

Volviendo al punto original, alcanza con que usted muestre el documento para conseguir que le impriman la tarjeta de embarque. Más aún: seguramente no se le escapa que ahora es posible tener acceso al asiento asignado en el avión usando solamente su teléfono celular. Para ponerlo en otros términos: ya no hay más necesidad de tener nada *impreso*, no hacen falta *átomos*: ¡todo es digital, todos son *bits*!

Cuento esta historia porque recuerdo perfectamente que cuando las compañías aéreas empezaron a implementar este sistema, yo me sentía desprotegido y dudaba de su efectividad: "¿Y si no encuentran mi pasaje? ¿Y si no me creen que yo lo compré? ¿Cómo los convenzo si no tengo ningún registro tangible de la operación?".

Hoy parece una estupidez, pero la necesidad de tener 'algo' en mi poder que pudiera 'demostrar' que yo tenía razón me ponía tenso antes de cada viaje. Mi imagino que su pregunta debe ser: "¿Por qué estoy relatando todo esto ahora?".

Téngame un poco de paciencia y verá.

Extrapolemos el ejemplo de los pasajes de avión (o de tren o de autobús o cualquier ejemplo equivalente que se le ocurra). Demos juntos una suerte de 'salto al vacío'. Imagine por un momento que tuviéramos la intención de hacer desaparecer todas las monedas que se usan en el mundo: *¡todas!* No me refiero

solamente al *dinero en efectivo* tal como lo conocemos, sino que desaparecieran *todas las variantes* que existen en cada país.

Posiblemente usted esté pensando en las tarjetas de crédito o de débito[50], o alguna variante del estilo, pero no, yo digo *reemplazar todas las monedas que circulen*, sean pesos argentinos, dólares, rublos, yenes, euros, patacones, etc., por una moneda única… ¡y virtual! Por ahora, la voy a llamar bitcoin[51].

Es fácil sospechar el tipo de problemas que esto generaría. De hecho, lograr que todo el mundo se pusiera de acuerdo en algo, sin importar 'qué', ya parece un despropósito. Sin embargo, y aunque me exponga a que me acuse de optimista, piense que en todo el mundo se usan semáforos. No importa en qué lugar se encuentre, si hay luz 'verde', usted entiende que tiene derecho a pasar, y si hay luz roja, usted está obligada/o a parar. Parece una trivialidad, pero lo logramos. Hay otros acuerdos universales[52], aunque de eso me voy a ocupar en otro momento. Lo

---

50. Las tarjetas de crédito o débito sustituyen *momentáneamente* que usted tenga que llevar *dinero en efectivo* en el bolsillo. Es una manera de mostrarle al vendedor que usted tiene ese dinero en *alguna parte* (por ejemplo, en el banco) o bien que el banco le garantiza a ese vendedor que la institución se hace responsable del dinero que usted debería pagarle en ese momento. Digo todo esto porque las tarjetas de crédito *no reemplazan al dinero en efectivo*, solo posponen que usted deba mostrar que lo tiene, sería el equivalente de *pagar con un cheque*. Algo más. Una diferencia *esencial* es que las tarjetas (de crédito o de débito) *no reemplazan al banco*. En cambio, *los bitcoin ¡sí!*

51. Yo sé que hay otras. No las voy a listar a todas ni tampoco tengo ningún interés económico en promover una sobre otra. Mi interés es solamente *comunicar* lo que significa una 'moneda virtual', cualquiera que sea. Uso los bitcoins porque me parece que son las más populares, las más conocidas.

52. Los billetes electrónicos o pasajes que emiten las compañías aéreas es otro ejemplo. Hay una red en la que convergen todas y cada una de ellas y en la que puede 'ver' lo que ha emitido una competidora. Esa base de datos

que quiero hacer es exhibir lo que *ya existe* (monedas virtuales), ver cómo funcionan y cuáles son las dificultades/problemas que surgen para que terminen reemplazando a todas las monedas del mundo.

Por supuesto que hay problemas técnicos, y a ellos me quiero referir. Pero también hay problemas impositivos, de identidad, gubernamentales, etc. Al mismo tiempo, más allá de hacer un recorrido por las dificultades que se presentan, también quisiera mostrar por qué habrá (y hay) una fuerte resistencia de todo el sistema financiero internacional. De hecho, si la población mundial pudiera ponerse de acuerdo en implementar una moneda 'virtual' única, los bancos dejarían de tener el control que tienen, las entidades financieras deberían ser 'redefinidas', la 'intermediación' desaparecería y, en esencia, las personas (usted, yo) lograríamos recuperar el poder de decidir qué hacer con nuestras posesiones.

En algún momento, el dinero reemplazó al trueque y fue, sin ninguna duda, un paso hacia adelante. Pero también hay un registro de *confianza* en cada transacción, por menor que sea. Aunque uno no lo advierta, en el momento en el que uno compra una botella de leche y paga con un billete de cualquier denominación, hay un instante de confianza entre usted y el cajero que le cobra. Casi siempre, usted entrega el dinero primero y espera que la persona que está del otro lado le entregue la leche, o al revés. ¡No se produce un intercambio simultáneo en donde con una mano usted entrega el dinero y la otra persona le entrega la leche usando la otra mano! Hay una 'minifracción de tiempo' en donde reina un acuerdo basado en la 'confianza'. Para variar… me desvié.

---

común, a la que todas tienen acceso, las obliga a 'honrar' los compromisos que aceptó cada una de las integrantes.

Quiero volver a la moneda virtual.

Lo que sigue ahora es una idea (aproximada) de cómo funcionan los bitcoins hoy. En el camino, estoy seguro de que me voy a aclarar yo mismo mis propias dudas. Veremos.

Como escribí antes, hace mucho tiempo que escucho hablar de los bitcoins. Quizás esto mismo le pase a usted. De hecho, conozco mucha gente que está a la búsqueda de descubrir nuevos (bitcoins). Acá tengo que hacer una pausa. La primera pregunta que se me ocurrió cuando escuché que hay personas que están buscando 'descubrir' bitcoins fue: ¿qué quiere decir que están tratando de descubrirlos? ¿Dónde están escondidos?

Por otro lado, si usted sigue leyendo verá que a las personas que se dedican a 'minar' o 'crear' nuevos bitcoins, se las conoce con el nombre de 'mineros', y aunque en este momento le resulte todo muy extraño, téngame un poco de paciencia y comprenderá por qué se los llama así.

También conozco mucha gente que ha 'invertido' en bitcoins, apostando a ese tipo de moneda como una manera de proteger su capital, y lo hizo como si hubiera comprado alguna acción en la bolsa. No hace falta que lo escriba, pero igual lo hago: hay muchísimas personas que 'deploran' su existencia y les auguran un futuro 'negro'.

Como usted advierte, 'hay de todo', pero si pudiera empezar con *una* observación que resuma mi posición actual diría: "Las criptomonedas, de las cuales los bitcoins son nada más que *una* de ellas, la más reconocida, llegaron para quedarse. ¡No hay vuelta atrás!".

El mayor problema que existe hoy es que cada vez somos más los que escuchamos hablar de ellos y todavía no entendemos específicamente qué son, cómo funcionan, cómo se generan, quién está detrás de ellos, cómo se opera con ellos, cómo se consiguen… y así podría seguir.

No se entiende tampoco si es conveniente que los usemos o no, si les conviene a los bancos que los usemos o, en cambio, ¡si NO les conviene! Por otro lado, no se me escapa que todo esto tendrá (y tiene) un lugar muy destacado en las finanzas internacionales. Entonces, aunque suene un poco maniqueo y 'antiguo', ¿a quién (o quiénes) les sirve que las criptomonedas tengan éxito? ¿A la derecha o a la izquierda? ¿A los bancos o a la gente común? ¿Y por qué hay tanto misterio sobre ellas? ¿Por qué no hay un poco más de claridad?

Por las dudas, me apuro en enfatizar que dentro del grupo de gente que no sabía (o no sabe) cómo contestar *todas* estas preguntas, estoy yo… ¡sin ninguna duda! Por eso mi objetivo no solo es tratar de aprender, también quiero ver si soy capaz de 'comunicar' lo que son, ahorrándole a usted el trabajo de tener que 'estudiar' y/o volverse un experto en bitcoins para poder hablar de ellos.

Vuelvo al punto que había planteado antes: supongamos que a partir de un determinado momento (fijemos el 1° de enero de 2025, por elegir una fecha cualquiera) el mundo entero se pone de acuerdo en que, desde ese día particular, ya no existirán ni se aceptarán más monedas ni más dinero en efectivo. Desaparecerán los dólares, los pesos, las coronas suecas, las libras esterlinas, los yenes, los euros… todo. Desde ese día habrá una única moneda, se llamará bitcoin[53] y será 'virtual'. Además, será utilizada por todos los países del mundo, sin excepciones.

---

53. Si usted está familiarizado con los bitcoins tal como existen hoy, apelo a su generosidad. Quiero ver si soy capaz de superar el desafío de tratar de *comunicar* y/o *popularizar* la idea de lo que significa una moneda 'virtual'. Ciertamente, en el camino voy a tener que hacer múltiples simplificaciones, pero si lo logro sin violar lo que conceptualmente significa, creo que habremos dado un paso adelante en entender 'algo' que *inexorablemente* va a pasar.

A esta altura, no parece que le genere muchos problemas al mundo que desaparezca el peso argentino o el peso chileno o el real brasilero. En cambio, ¿se imagina si uno dijera que van a desaparecer los dólares o los euros? Por supuesto, habrá que encontrar alguna manera de convertir todo el dinero en efectivo de cualquier moneda que haya en el mundo a bitcoins. Para hacerlo, nos tendremos que poner de acuerdo en varios puntos. Estos son algunos de ellos.

¿Cómo se mide el *capital* que tiene una persona? Si una persona está en la Argentina y tiene su capital en *pesos* y otra está en Gran Bretaña y tiene su capital en *libras* o en Italia y tiene su capital en *euros*, ¿cómo hacemos para adjudicarle a cada uno la cantidad de bitcoins que les corresponden? ¿Quién estaría autorizado para tomar las decisiones que habiliten las conversiones? O puesto de otra manera, ¿quién 'establece' el 'valor' del bitcoin?

Esta es una pregunta natural. No me refiero —por ahora— a bienes inmuebles o posesiones materiales de cualquier tipo, aunque la respuesta debería ser similar. No. Me refiero *únicamente* al dinero que usted tiene en su bolsillo o en un banco. Si una persona tiene mil pesos argentinos o mil euros o mil libras esterlinas, ¿cómo *convierte* su dinero a bitcoins?[54]

Para decidir cómo convertir el dinero en efectivo que usted tiene en cualquier moneda, piense que —por ahora— los bitcoins cotizan en bolsa. ¿Qué quiero decir con esto? No soy un experto ni mucho menos, pero la idea es que usted pueda ir a un banco (o hacerlo por internet), se fije cuántos pesos argentinos (o dólares o yenes) debe pagar para 'comprar bitcoins', haga la

54. Antes que me lo pregunte, me doy cuenta de que habrá que decidir *dónde están o quedarán registrados* los bitcoins que tiene cada persona, pero eso lo voy a contestar más adelante. Vayamos por partes.

conversión e inmediatamente tenga su dinero transformado en bitcoins. O sea, esa parte *debería* ser fácil. Más allá de los inconvenientes técnicos, no parece ser un tema muy grave.

Pero no se me escapa un problema muy serio: la mayoría de los habitantes del mundo no tienen dinero en efectivo guardado en ninguna parte, y tampoco me imagino a esas 'grandes mayorías' yendo a ninguna casa de cambio a llevar su dinero (mucho o poco) para que sea convertido a una moneda 'virtual'.

Le propongo que —por ahora— acepte que yo avance por otro lado, porque si elijo ese rumbo, este texto en sí mismo carece de sentido. Es decir, hagamos de cuenta que *toda persona que habita la Tierra* está en las mismas condiciones, como si viviéramos todos en Disneylandia.

Supongamos entonces que todo el mundo aceptó que a partir de un determinado momento todas las monedas desaparecen y que el capital de toda persona tiene ahora un equivalente en bitcoins. ¿Cómo sigue todo?

En *alguna* parte, tendría que haber un *registro* de las operaciones que se realizan y que debería ser accesible para todo el mundo y *válido* en todo el mundo. Por ejemplo, si una señorita uruguaya llega a Oslo, en Noruega, y quiere pagar su noche de hotel, debe haber alguna forma de convencer al empleado para que le reconozca los bitcoins que ella dice tener. ¿Cómo hacer?

Por eso decía: ¿dónde queda registrada cada operación? Esta ya es una pregunta que requiere una respuesta un poco más complicada.

Podríamos empezar a llevar una suerte de LIBRO MAYOR, como en una empresa, en donde quedan registradas *todas* las operaciones que se realizaron desde el primer día que abrió sus puertas. Pero de este LIBRO MAYOR no puede haber una sola copia como es habitual en una compañía, sino que tendría que ha-

ber tantas como sean necesarias. Por otro lado, todas *tienen* que ser iguales, se deberían actualizar instantáneamente y, además, debería existir una garantía de que no se puede *fraguar* ninguna operación.

Es decir, por un lado, debe estar registrada la cantidad de bitcoins que tiene cada persona. De esa forma, todos los individuos tendrían una suerte de 'billetera virtual' en donde se llevará un registro de todo los bitcoins que posee en cada momento. Y a partir de allí, todas las fluctuaciones que se produzcan, ya sea para incrementar o disminuir la cantidad. Pero no solo eso: como usted verá más adelante, una vez que una persona accede a tener una billetera virtual (o una 'criptobilletera'), allí quedará anotado ***para siempre*** el registro de lo que tuvo desde el día 'cero'. *Todas* las operaciones que hizo desde ese momento quedarán registradas por los tiempos de los tiempos. Esa información será inviolable, segura, inmodificable y además… ¡anónima! No habrá manera de *ligar* esa información con la persona (o entidad física) en la vida real. Aunque parezca un hecho trivial, supongo que a usted no se le escapa que esto es un *tema central*. Sigo.

Un par de observaciones importantes que tienen que ver con las protecciones para el *dueño* de los bitcoins por un lado y para el resto de la gente por el otro. Me explico.

Para el dueño, *su criptobilletera tiene que ser inviolable*. Y totalmente *invisible* para el resto de la humanidad. Como escribí antes: la identidad y el volumen de bitcoins que contenga debe tener *visibilidad* y *acceso* disponible para una *única* persona: ¡el dueño! ¡Y nadie más!

Por otro lado, será necesaria una componente de seguridad para los que quedamos del *otro* lado, o sea, el resto de la humanidad, los que no tendremos acceso a la billetera digital de esa persona.

Más adelante verá cómo el sistema que lleva el registro de

los bitcoins (o ese LIBRO MAYOR) ***nos garantiza a todo el resto*** que esa persona no pueda *gastar* dos veces (o más) esos mismos bitcoins. Esto es importantísimo por varias razones, pero tiene que quedar muy claro que una vez que una persona usó un bitcoin (o fracción de él) de su billetera para pagar o comprar algo, esa operación tiene que quedar instantáneamente registrada en su criptobilletera para que no pueda usarlo otra vez. Además, como ese bitcoin o fracción cambió de manos, todos tendremos la información de que no está más donde estaba y ahora está en otro lugar. No hay manera de que lo vuelva a usar una segunda vez, pero tampoco se perdió: si bien no sabremos la identidad de la/s persona/s que lo tiene/n ahora, lo que sí sabremos es que está en *otra criptobilletera*.

Vuelvo al LIBRO MAYOR. Como decía, ese libro debe tener múltiples copias, tantas como sean necesarias. Debe ser de acceso fácil y, además, gratuito[55]. Bastará con poseer el software necesario y que ese software lo pueda tener cualquiera.

Por otro lado, y esto es esencial, *todas* las copias deben tener la misma información, y cada operación que se produzca *alterará TODAS LAS COPIAS DEL LIBRO simultáneamente.*

Llegado a este punto, quiero detenerme un instante porque el grado de dificultad de las situaciones que planteé acá es bien distinto. Fíjese por qué.

Hacer múltiples, miles de millones de copias (eventualmente una por cada una de las siete mil millones 'y pico' de personas

55. No crea que se me escapa que —por ahora— el acceso a internet *no es universal, ¡ni mucho menos!* Y la gratuidad es —todavía— más una fantasía mía que una potencial realidad. En todo caso, aquí estoy describiendo lo que uno necesita(ría) para que todas estas herramientas estén al alcance de *todo el mundo* y *en forma gratuita*.

que habitamos el planeta hoy), no debería ser tan difícil. ¿Por qué? Piénselo así: si usted envía un correo electrónico (por poner un ejemplo) a una persona o a un millón es lo mismo, no requiere de ningún esfuerzo 'extra' de su parte. En todo caso, dependería de contar una forma de enviarlo a *toda su lista de contactos* (o una lista de contactos que alguien le provea), pero en sí mismo no tiene que procurarse ningún tipo de trabajo extra: aprieta el botón de 'enviar' y listo. Eso resuelve el problema de 'actualizar' todas las copias simultáneamente.

Ahora bien, los puntos críticos —me parece— están puestos en otro lugar. Acá van algunos:

a) ¿Cómo lograr esa instantaneidad o simultaneidad en *cada operación* que se produzca?
b) ¿Cómo se garantiza la *inviolabilidad*, o seguridad? En algún sentido, la pregunta debería ser: ¿cómo garantizar que *nadie pueda modificar* lo que está escrito?
c) Otra pregunta interesante que no quiero postergar más y que seguramente usted ya se habrá hecho. ¿En qué idioma va a estar escrito el LIBRO MAYOR? La respuesta en ese sentido es sencilla: cada página del LIBRO MAYOR estará codificada (o encriptada) y lo que uno vería (si imprimiera una página cualquiera) serían 'tiras' de letras y números que en principio lucirían *indescifrables*. Solo serían comprensibles para una computadora con el software adecuado. Por lo tanto, se trata un lenguaje *universal*. En algún sentido, piense que los números *cumplen* con esa propiedad. No importa cuál sea su idioma materno, los dígitos son todos iguales y se entienden en cualquier parte del mundo, tanto en Noruega como en Nigeria. Aun en países que tienen otros alfabetos que a nosotros nos resultan más exóticos,

como China, India, Grecia o Israel, todos entienden lo que son los 'grafos' que usamos como 'dígitos': el 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 0, son universales

d) Y otro tópico *esencial*. Si uno quisiera 'encriptar' un texto, lo hará el software de la computadora (luego voy a intentar contar cómo se hace), no requiere de usted *nada en particular*. Sin embargo (y présteme atención en este punto), 'encriptar' es una cosa, en cambio 'DESencriptar' es otra. Puesto de otra manera: *ir para un lado (encriptar)* es muy *fácil*. *Volver para atrás (desencriptar)* es virtualmente *imposible*. Quien quiera hacerlo necesitará una 'clave' que solamente poseerá/án la/s persona/s involucrada/s en la transacción.

Como usted advierte entonces, aparecen algunas dificultades *técnicas*. Voy a tratar de describir cómo se resuelven esas dificultades sin necesidad de entrar en tecnicismos matemáticos, pero tiene que quedar claro esto: *no es esperable que ninguna persona necesite tener ningún conocimiento específico para poder hacer una operación*. De la misma forma, (quizás) usted sabe cómo conducir un automóvil pero es muy probable que no sepa cómo se construye ni por qué funciona. En todo caso, yo estoy seguro de que ¡no lo sé! O sea, son dos puntos diferentes: saber manejar es (o debería ser) fácil. Saber armar o construir un auto, es una dificultad de *otra* categoría.

ESA es la aspiración: *fácil* acceso, *fácil* uso, *cero* complicación y *máxima* efectividad, *sin necesidad de que ninguna persona sea especialista* en criptografía, criptomonedas, bitcoins ni en nada. Tiene que ser *de tan fácil uso como lo es el dinero en efectivo* que manejamos todos los días.

En todo caso, la *única* condición necesaria que para poder *leer* lo que esté escrito en esas páginas es conocer una contraseña, tal

como sucede con un cajero automático, una cuenta de correo electrónico o su teléfono celular. Es decir, no hace falta *nada* diferente de lo que ya hacemos en la vida cotidiana.

Quiero hacer una aclaración. Al releer lo que escribí hasta acá, me quedé con la sensación de que usted podría creer que para que usar una criptomoneda, haría falta que desaparecieran todas las otras monedas en el mundo… *¡Eso es* ABSOLUTAMENTE *FALSO y, además,* INNECESARIO*!* Si usted se quedó con esa impresión, es mi culpa. No es así, ¡para nada! Lo escribí de esa forma porque creo (y esto es pura especulación mía) que ese es *inexorablemente* el futuro. El dinero en efectivo, tal como lo conocemos, resolvió un problema hace varios siglos, cuando la tecnología que teníamos a disposición era —obviamente— muy diferente. Hoy el dinero en efectivo parece *imprescindible* cuando se trata de hacer operaciones *ilegales*, ya sea para 'vender mercadería robada' (¿quién lo va a hacer escribiendo un cheque o usando una tarjeta de crédito?) o para conseguir algunos medicamentos en forma ilícita (o no *recetados* por un médico). Todo el resto de las transacciones de nuestra vida cotidiana deberían ser posibles de realizar *sin necesidad* del uso del papel[56] que represente cualquier moneda[57].

56. Como escribí anteriormente, imaginar que *todo* el mundo tiene acceso a dispositivos electrónicos e internet todavía contiene una porción de *fantasía* mía. Mientras esto no suceda, el dinero en efectivo será imprescindible para todos aquellos que no tengan cuentas bancarias ni teléfonos celulares ni tabletas… Y por ahora, estas condiciones aplican para la *mayoría* de la población mundial. Conclusión: aún estamos muy lejos de concretar lo que estoy describiendo.

57. Esto abre también un debate sobre el derecho a la *privacidad*. Si no existiera el dinero en efectivo y todo fuera hecho a través de algún tipo de tarjeta (crédito, débito, etc.) o incluso mediante cheques, nuestra *privacidad*

A esta altura, cada vez que usted lee LIBRO MAYOR, o sea, el lugar en el que quedan registradas todas las operaciones, tiene derecho a preguntarse a qué me estoy refiriendo, quién lo tiene. En todo caso, *¿qué es un 'libro mayor'*? La abrumadora mayoría de las personas vivieron muy bien hasta acá sin uno de ellos, no lo vieron/ven, no lo usan, ni escucharon hablar de él. ¿Por qué, súbitamente, aparecería en nuestras vidas un libro de estas características?

Ahora verá. Téngame un 'poquito más' de paciencia. Quiero dedicarle unos párrafos a las *blockchains*.

Blockchains

Si llegó hasta acá, permítame decirle que lo que sigue —creo— es la parte más interesante de todo el texto. Lo digo porque contiene algunas ideas ciertamente muy novedosas. A medida que usted avance, logrará —como me fue pasando a mí— capturar la 'calidad' de esas ideas (que ciertamente *no son mías*). Verá que estas mismas ideas no solo se pueden utilizar para las criptomonedas, sino también para muchas otras actividades que requieren del mismo tipo de protección, privacidad, seguridad y confianza.

Me quiero poner de acuerdo con usted en algunos nombres, pero no permita que estos nombres la/lo confundan. No tienen importancia, solo es una manera de referirme a ellos. Hagamos

---

quedaría en manos de los bancos o del Estado mismo. De hecho, hay países (como China) en donde las transacciones se hacen cada vez más usando un sistema conocido con el nombre de *wechat*. Es un sistema *no descentralizado* que usa la web tradicional, y justamente permite (o permitiría) al Estado monitorear la actividad económica de todos los ciudadanos.

de cuenta que vamos a abrir una empresa. Esa compañía necesita que *anotemos y dejemos REGISTRO* de todas las operaciones que hagamos, desde el día *uno*. Supongamos también que la compañía tiene múltiples sucursales en diferentes partes del mundo; si prefiere, digamos que tiene sucursales en *todo el mundo*. Eso sí: *toda operación que hagamos desde el momento de la fundación debe quede* ***escrita*** *en este libro que llamé LIBRO MAYOR*.

Lo notable, y necesario también, es que no solo queden registradas todas las operaciones, también importa en qué *orden* se hicieron. Quiero que guardemos *todos* los datos de lo que está sucediendo en *todo* el mundo con la *prolijidad* y *eficiencia* como para saber si en Bangladesh —por ejemplo— hay una sucursal de la compañía que *dice* que allí se realizó una operación. Por ahora no tiene importancia si es de compra o de venta, lo que *sí* importa es que se efectuó alguna operación que debe quedar registrada en este LIBRO MAYOR. Justamente lo que yo llamé LIBRO MAYOR en este contexto es lo que en todo el mundo se llama *blockchain*.

Este es el *verdadero* nombre[58]. En inglés, *blockchain* significa 'cadena de bloques'. Los bloques son las páginas del libro. Justamente, como cada *página* del libro es un *bloque* de la cadena, tendrá suprema importancia el *orden* en el que aparezcan las operaciones y cómo se 'enlazan' esos bloques o, lo que es lo mismo, la forma en la que aparezcan encadenados.

Por un lado, importa el orden en el que quedaron registradas

58. Cuando pregunté a los expertos cómo se dice en español, *todos* me dijeron que *tenía* que usar blockchain, porque si no, nadie entendería de qué estaba hablando. Es por eso que terminé transando: se llamará blockchain a lo largo de todo este artículo.

las operaciones dentro de cada bloque; por otro, también importa el orden en el que aparezcan las páginas, o sea, los bloques propiamente dichos. Es decir, una vez que uno le puso *un número al bloque* (como si fuera el número que distingue a una página) ya nunca más nadie podrá alterar ese número. En algún sentido, la blockchain es un libro de páginas numeradas y tanto lo que está escrito en cada página como la numeración de cada una de ellas es *invulnerable e inviolable*.

Al mismo tiempo, es fácil concluir que si pretendemos que quede registrado lo que sucede en todo el mundo, esta cadena deberá tener muchísimos bloques. Como verá en poco tiempo (si sigue leyendo), la *forma* en la que 'encadenemos' los bloques será no solo (casi) inviolable sino que quien/es lo diseñó/ñaron fue/ron especialmente *creativos*: de allí el nombre de blockchain.

Esta blockchain tiene que estar actualizada en forma *instantánea en todo el mundo y al mismo tiempo*. Como usted habrá detectado desde hace tiempo, en el mundo virtual no hay 'original' y 'copias': *TODO es igual*, *originales y copias son indistinguibles*, cosa que claramente es falsa en el mundo de los átomos.

Por ejemplo, en la época en la que había videocasetes, era muy fácil descubrir una copia, y cuantas más copias se hacían, menos claridad y calidad se obtenía. De la misma forma, uno no puede hacer una copia de un peso o de un dólar. Es muy fácil distinguir la copia del original. En el mundo digital, ¡esa diferencia no existe! *Todo es original* o, si usted prefiere, *todo es copia*. Lo que *sí* importa es que *todas las copias de la blockchain sean iguales*. El libro es el mismo *todo el tiempo*. No es *fácil* (para nada) agregarle bloques a esta cadena (o páginas a este libro), pero una vez que un bloque ha sido agregado y ha sido universalmente aceptado, la blockchain varió y *todas las copias que hay en el mundo cambiaron simultáneamente*.

El orden

Quiero proponerle que piense conmigo sobre lo 'decisivo' hablar del orden, y por qué hago *tanto hincapié en la cronología con la que aparecen escritas las operaciones.*

Supongamos que en un momento determinado, usted era poseedor de un cierto número de bitcoins. Eso está registrado en algún bloque (o en alguna página) del LIBRO MAYOR. Si quiere *comprar* algo, es muy importante que se sepa que *sigue teniendo esa cantidad de bitcoins* como para poder efectuar la operación. Es decir, *importa mucho* que *todo el mundo* sepa que cuando usted hizo la tal operación, usted *tenía ese dinero*.

En algún sentido, es como si ese orden conservara un par de propiedades importantes:

a) Si usted quiere comprar dos productos diferentes, no puede usar *dos veces* (o más) el mismo dinero para hacerlo. Importa que quede registrado *instantáneamente* que una vez que pagó el primero, *no tiene más* el dinero que tenía antes de esa operación.
b) Por otro lado, si una persona vendió un producto que a usted le interesa, ese producto ya *no debería* estar disponible en el momento en el que lo quiera adquirir.

En ambos casos, en ambas situaciones, el *orden* tiene esencial importancia.

Si no soy suficientemente claro, le pido que no se frustre (no haga lo que hice yo durante muchísimo tiempo): deténgase y vuelva a leer (y si está interesada/o en algo más, la literatura sobre el tema es increíblemente vasta y, en algunos casos, muy explícita). Más adelante, voy a agregar suficiente información y 'fuentes'

para que usted pueda acceder a más datos y educarse *mejor* (si es que el tema le sigue interesando). Ahora vuelvo a los bloques y a la forma de encadenarlos, a lo que se llama la tecnología de las blockchains[59].

Parte 2

Una sugerencia: es posible que a lo largo del texto aparezca algo que no la/lo convenza, o sienta que se perdió o se está perdiendo. Si me tiene 'un poco' de confianza, no abandone, no deje. Ningún detalle es *esencial* como para perderse para siempre, y cuando haya alguno que me parezca imprescindible, lo voy a escribir de varias maneras para intentar que quede claro.

Vuelvo al LIBRO MAYOR. Una diferencia muy importante es que en la vida 'real' y en las empresas tales como las conocemos, hay una sola copia de este tipo de libro. Esta copia está certificada por escribanos que, con sus sellos y firmas, garantizan que lo que está escrito se corresponde con lo que fue sucediendo paso a paso.

Abordemos ahora los problemas que describí antes. Por ejemplo:

59. Usar el *femenino* para hablar de 'las' blockchains suena extraño, pero también suena extraño hacerlo en *masculino*. En inglés, que es donde se ha originado esta tecnología, el problema desaparece porque los objetos no tienen sexo. Para nosotros, 'lapicera' es femenino igual que 'nariz', pero 'ojo' es masculino lo mismo que 'pie'. Si hay *algo* que confunde a todos los que no tienen al español como idioma original y llegan desde el inglés (por ejemplo) es esta mezcla de géneros que no siguen una lógica que uno pueda aprender. A todos ellos, perdón.

a) ¿En qué idioma aparecen escritas las operaciones?
b) ¿En qué orden aparecen si en principio no hay contacto entre las personas que están diseminadas en diferentes partes del mundo?
c) ¿Cómo se validan? Y más importante aún, ¿quién es el que las da por válidas? ¿Quién tiene ese *poder*?
d) ¿Cómo se hace para que *todas* las copias se *actualicen* al mismo tiempo?
e) ¿Cuántas operaciones caben en cada página (o en cada bloque)?
f) ¿Cuántas páginas tiene este libro o esta blockchain?

Estas son solo *algunas* de las preguntas para contestar.

Para empezar, un episodio notable: el tema del idioma. Si no está acostumbrada/o a leer o escuchar la siguiente frase, le va a parecer que está en chino. Téngame un instante de paciencia y verá que lo va a entender perfectamente: "Un hecho realmente *singular* es que la comunidad internacional se puso de acuerdo en utilizar *un algoritmo que codifica la información que uno ingresa*".

¡No se asuste! Me explico.

Un 'algoritmo' es como una 'hoja de ruta' que sigue una computadora, como una serie de 'pasos' que está preparada para dar. Uno 'ingresa' cierta información, la computadora efectúa los pasos que tiene escritos y con ellos obtiene un resultado. Sería algo así como tener una receta de cocina. Usted pone los ingredientes, que son los datos que ingresará con el teclado, y la computadora, siguiendo el programa (o el algoritmo), le ofrecerá en la pantalla (por ponerlo de alguna forma) un 'resultado'.

Usted 'tipea' una cierta frase y en la pantalla de la computadora aparece un 'texto' que 'codifica' lo que uno escribió. ¿Qué quiere decir 'codificar'? En este caso, que la computadora 'traduce' lo que

usted escribió a un idioma particular establecido y aceptado por todo el mundo. Es como decir que la computadora usa ese algoritmo para traducir o encriptar lo que usted introdujo. Lo traduce de una forma extraordinaria. Mire cómo funciona porque es una de las cosas más fascinantes de este proceso.

Fíjese lo que sucede —por ejemplo— en español. Tome la palabra 'matemática'. Cuente cuántas letras tiene. En total, son diez letras. La palabra 'computadora' tiene once letras. Las palabras 'te' y 'café' tienen dos y cuatro letras, respectivamente.

Como usted advierte, en *todos* los idiomas que usted conoce y/o habla, el diccionario está formado por palabras de diferente longitud. Lo *extraordinario* es que las palabras de este 'nuevo' idioma que aparece en la pantalla después que usted escribió un texto tienen *SIEMPRE 64 letras*. No importa cuán largo o corto sea el texto que usted ingresa: la *traducción* es *UNA SOLA* palabra de 64 letras. ¿No es notable?

Y algo más: el alfabeto que usa este nuevo idioma usa *nada más* que 16 letras. Sí, como leyó: *¡solamente 16 letras!* En español, por ejemplo, nuestro alfabeto tiene 26 letras y, en general, dependiendo del idioma, no hay *ninguno* que tenga menos de 25. En cambio, *este idioma particular* tiene solamente 16.

Resumiendo:

1) Usted escribe un texto que quiere que aparezca en el LIBRO MAYOR. Por ejemplo: "Alicia le vendió cinco bitcoins a Carmen".
2) Ni bien usted 'ingresa' este texto en su computadora, el algoritmo que 'traduce' o 'codifica' o 'convierte' este texto, le asigna *una sola palabra* de este nuevo idioma.
3) *Todas* las palabras de este idioma tienen la misma longitud: ¡64 caracteres!

4) El alfabeto del que están compuestas las palabras de este nuevo idioma tiene *exactamente 16 letras*.

Quizás usted se estará preguntando por qué yo uso la palabra ‘caracteres’. Es que este idioma, como escribí antes, usa nada más que 16 símbolos entre los cuales están los diez dígitos que conocemos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9) y las primeras seis letras: A, B, C, D, E y F. O sea, *en total*, estos son los 16 caracteres que usa este nuevo lenguaje[60]:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E y F

Eso sí: me importa hacer énfasis en un hecho particular. Cuando escucha (o lee) que en este lenguaje TODAS las palabras tienen la misma longitud (64 caracteres), pero que hay *nada más* que 16 letras, a uno le parece que ¡no van a alcanzar! Es que yo estoy diciendo que *cualquier texto* que yo ponga, la computadora lo traducirá a *una sola palabra* de este tipo… Parece que serán insuficientes, ¿no es así?

Me apuro a responder la pregunta que quizás usted todavía no se hizo: la manera de ‘contar’ cuántas de estas palabras hay[61] es *multiplicar el número 16 por sí mismo 64 veces*. Es decir:

---

60. Este lenguaje se llama *hexadecimal*, justamente porque tiene 16 caracteres. Estos son *todos* los dígitos de nuestro sistema de numeración: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Pero demás, como no tenemos símbolos para indicar 10, 11, 12, 13, 14 y 15, usamos las primeras letras de nuestro alfabeto: A, B, C, D, E y F.

61. Si uno quiere calcular cuántas ‘palabras diferentes’ de 64 caracteres se pueden formar con 16 letras, lo que tiene que hacer es evaluar 16^{64}, que es lo mismo que multiplicar el número 16 por sí mismo 64 veces. De allí el resultado al que llegamos.

$$16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times \ldots \times 16 \times 16 \text{ (64 veces)} =$$
$$115.792.089.237.316.195.423.570.985.008.687.907.853.269.984.665.640.564.039.457.584.007.913.129.639.936$$

Como usted advierte, es un número *muy grande*.

El algoritmo que traduce y/o convierte cualquier texto a *una sola de estas palabras* tiene un nombre (y usted puede buscarlo por internet ya que hay muchísima literatura escrita al respecto): se llama SHA-256 (un nombre técnico). SHA son las iniciales de Secure Hashing[62] Algorithm (Algoritmo seguro de Hashing) y, de hecho, es 'casi' autoexplicativo, en el sentido que habla sobre la *seguridad criptográfica*.

Ahora llega el momento de contestar otra pregunta que quizás usted se haga (o ya se hizo): ¿qué pasa 'al revés'? Es decir, uno podría preguntarse: "Si yo encuentro (o invento) una de esas 'palabras' de 64 caracteres (elegidas entre las 16 que escribí antes), ¿puedo encontrar el texto del cuál proviene?".

Por ejemplo: supongamos que yo encuentro en alguna parte escrito este texto que tiene 64 caracteres (no hace falta que los cuente y pierda el tiempo, ya lo hice yo):

A13CB8879023509BCB-
CB019275378911111211387997BBBA044798728555ABC

---

62. Si bien la palabra *hash* tiene un significado en la vida cotidiana (sería algo así como 'picar' o 'picadillo'), en criptografía, una función de *hash* es un algoritmo que transforma un bloque de datos cualquiera en una serie de caracteres que tiene una longitud fija. Por ejemplo, si uno aplicara una función de *hash* a toda la obra de Shakespeare, obtendría una 'tira' de 64 caracteres, y lo mismo sucedería si uno tomara nada más que el título de una sola de sus obras. Es una manera de codificar (en este caso se trata de textos), pero tiene muchas más utilidades de las que yo puedo describir en este pequeño espacio.

¿Se podrá ‘ir para atrás’ y encontrar el *texto* que dio lugar a esa palabra?

La respuesta es: ¡no! Virtualmente, es *imposible* volver hacia atrás. Como usted se da cuenta, es un dato importantísimo ya que una persona podría ‘ingresar’ a leer el texto de este LIBRO MAYOR y encontrar ese tipo de palabras, pero, aunque la lea, no podrá deducir qué es lo que dice.

Lo que sí resulta *trivial* es escribir un texto cualquiera en su computadora y el algoritmo SHA-256 le asigna una *única* palabra de 64 caracteres extraídos entre solamente 16 letras. ¡Y listo!

Esto que acabo de escribir es muy (lea esta palabra una vez más: MUY) *importante*. Es muy fácil codificar usando el algoritmo SHA-256, pero es virtualmente *imposible* ‘ir para atrás’, o sea, ‘averiguar de qué texto proviene’.

Y algo más que me parece interesante observar.

Supongamos que yo tipeo: “Alicia le vendió cinco bitcoins a Carmen”. En la pantalla de su computadora aparece *esta* palabra:

A13CB8879023509BCB-
CB019275378911112111387997BBBA044798728555ABC

Ahora, ¿qué pasaría si yo cambiara la letra ‘c’ en el nombre de Alicia por una ‘z’ (por inventar un cambio cualquiera), es decir, que pusiera *Alizia* en lugar de *Alicia*? ¿Qué modificación produciría el algoritmo? ¿Cambiará *mucho* o *poco* la nueva palabra de 64 caracteres que se obtenga?

Respuesta: la nueva palabra *no tiene nada que ver con la anterior*, aunque el cambio que usted haya hecho en el texto original haya sido tan menor como haber alterado *una sola letra*, la ‘c’ por la ‘z’.

La palabra nueva que codifica el texto “Alizia le vendió cinco bitcoins a Carmen” podría ser así:

BBBBZ123455678987987034CCCC72837ABABAB-
80473879832CCCCCCCCC213

Aquí entonces otra breve pausa: ya sabemos que hay un algoritmo que ‘codifica’ los textos y los convierte a un nuevo idioma. Sabemos que en este nuevo idioma *todas* las palabras tienen la misma longitud (64 caracteres) y que estos caracteres son en total 16, compuestos de los diez dígitos y las primeras seis letras de nuestro alfabeto. Más aún: a cada texto le corresponde *nada más que una palabra*. Por último, si uno tiene una de estas palabras de 64 caracteres extraídos de esas 16 ‘letras’, es virtualmente imposible ‘deducir’ de qué texto provino.

Al llegar acá, piense que varias personas en el mundo están produciendo nuevas operaciones y las quieren anotar en uno de los ‘bloques’ o ‘páginas’ de este LIBRO MAYOR. En realidad, además de escribir que “Alicia le vende los cinco bitcoins a Carmen”, el texto (aunque yo no lo haya dicho todavía) va a incluir que la operación se produce a las 3:17 pm del 3 de noviembre del año 2019. Aunque sea ‘invisible’, esta información *también* va a estar incluida en el texto que usted codifica. No lo escribí hasta acá, pero cada operación lleva ‘incluida’ o ‘estampada’ una suerte de ‘sello’ que contiene la dirección *codificada* del origen, la dirección *codificada* del destinatario, el *monto de bitcoins* involucrado en la operación y la *fecha*.

Las transacciones en sí mismas están totalmente ‘anonimizadas’.

Entonces, hay miles de operaciones de este tipo produciéndose en el mundo, y hay miles de personas ‘en el mundo’ tratando de que queden incorporadas al LIBRO MAYOR. En este

punto aparecen dos *ideas* de las que —quizás— usted escuchó hablar:

a) los mineros (de los que hablé al principio de este texto);
b) *Proof of work* (no se asuste, en inglés quiere decir: 'prueba de trabajo').

Ya verá qué es.

Parte 3

Hasta acá llamé LIBRO MAYOR a este libro en donde figuran todas las transacciones. Pero a partir de ahora le voy a dar el nombre que le corresponde y del que hablé un poco antes: la 'cadena de bloques', que se conoce en todo el mundo por su nombre en inglés: *blockchain*.

Ya sabemos, además, que cada operación que queda registrada utilizará un idioma que contiene un alfabeto de 16 letras, y que las instrucciones consisten de *una sola palabra* de 64 caracteres. Lo que me falta hacer es explicar qué propiedad tiene que cumplir una palabra para que sea aceptada en el bloque, y qué propiedades debe tener el bloque para que sea incorporado a la cadena.

Por ahora, concédame que la página 1 de la blockchain ya está escrita. Después me voy a ocupar de explicar qué figura en este primer bloque. Ahora quiero hablar del *orden* en el que se registran las transacciones. Verá que este no es un tema menor. ¿Por qué?

Suponga que un tal Carlos tiene *en total 20 bitcoins* en su billetera virtual. En un momento determinado, usa 10 de los 20 bitcoins para comprarle un cuadro a Miguel. Digamos que esa

operación se hizo a las diez de la mañana del 20 de octubre de 2019. Ahora, Carlos ya no tiene más 20 bitcoins, solo le quedan 10. Más adelante, a las tres de la tarde del mismo día, Carlos se aprovecha de que el orden podría no ser respetado y decide comprar otro cuadro, esta vez a Claudio, que cuesta 20 bitcoins. Si no hay un registro *estricto* del orden en el que se producen las transacciones, Claudio no tendría manera de saber que Carlos ya no tiene 20 bitcoins sino que le quedaron nada más que 10 después de la operación que hizo con Miguel. Como Claudio lo ignora, porque la transacción no apareció registrada aún, cree que Carlos tiene aún los 20 bitcoins y le vende su cuadro, pero o bien él no los podrá cobrar (porque Carlos ya no los tiene más), o bien Miguel entregará su cuadro y a Carlos le faltarán 10 bitcoins para pagarle.

Aunque parezca un poco 'confuso', usted advierte que el *orden* en el que se registran las operaciones es de vital importancia para que una persona no use dos (o más) veces la misma 'moneda' que en realidad no tiene. En cambio, si las transacciones son registradas respetando el orden cronológico, los sistemas de seguridad advertirán que eso no puede suceder y cancelarán inmediatamente el intento de Carlos.

Moraleja: junto con la información de la compra y/o venta de cualquier producto que involucre los bitcoins que una persona tiene (o no tiene), debe estar escrito en el orden en el que se produjeron para garantizar que una persona no use (equivalentemente) dos veces el mismo 'billete'. Esa sería la mejor analogía que se me ocurre usar. Si usted tiene en el bolsillo dos billetes de 100 pesos y usó uno para pagarle a Miguel un cuadro, entonces no puede usar los dos billetes otra vez y comprarle a Claudio un cuadro de 200 pesos porque sencillamente no tiene el dinero suficiente. ¡El orden, obviamente, importa!

Vuelvo al *primer bloque* de la cadena. Ahora, necesitaría que usted esté *alerta* con lo que sigue porque será importante en el desarrollo. Preste atención a lo que voy a escribir.

En el primer bloque de la blockchain, además de estar registradas todas las transacciones, aparece una *firma*. Sí, una firma. ¿Qué es una firma?

Si usted quiere comprar un departamento, se encuentra en la oficina de un escribano con las dos partes involucradas (es decir, se presentan el comprador y vendedor). El escribano certifica que quien vende sea el verdadero dueño del departamento y que tenga el título de propiedad del inmueble. Por otro lado, certifica que el comprador tiene el dinero que el vendedor quiere para poder entregarle la posesión del inmueble. En algún sentido, el escribano es la *garantía* de que ambas cosas son ciertas.

¿Qué hace entonces el escribano? Usa su firma (y eventualmente un *sello* o *estampillado*) para garantizar la operación. ¿Qué pasaría si el vendedor cometió un *error* en la superficie del departamento y en lugar de ser 220 metros cuadrados son 210? ¿Cambiaría la firma del escribano?

Respuesta: ¡no! El escribano corroboraría que los datos cambiaron y después firmaría de la misma forma que antes y eventualmente poniendo el *mismo* sello, aunque la *información* que estaba escrita era equivocada (o haya cambiado).

En el caso de la blockchain eso no sucede. Si hay *cualquier modificación* (por mínima que sea) en *cualquiera* de las transacciones que figuraban en la página 1 (en el bloque 1), entonces *¡la* FIRMA CAMBIA *también!*

Esto es un hecho notable. La firma que garantiza las operaciones *cambia* con las transacciones. ¿Por qué esto es muy importante? Porque si, por ejemplo, en el LIBRO MAYOR de una compañía que existe hoy en la vida real, una persona lograra

hacer una modificación en alguna página de ese libro, *la firma del escribano que había garantizado todo como estaba antes ¡no cambiaría!* El cambio *no incidiría* en la firma del escribano. Sin embargo, en el caso de la blockchain, esto ya no es más cierto. Si se produjera cualquier alteración de lo que figuraba en un bloque, aunque sea agregar (o quitar) un 'acento', eso ya modificaría la *firma que debe llevar el bloque*. Siguiendo con la analogía del escribano y la vida real, sería algo así como que la *firma* del escribano *cambia* de acuerdo con lo que tiene que certificar. En realidad, *nunca más será la misma*, porque aunque las transacciones sean iguales (me refiero a las direcciones de origen y destinatario, codificados, claro está) y aun el monto, lo que se habrá alterado (por ejemplo) es la fecha o la hora. O sea, *¡¡¡las firmas son únicas e irrepetibles!!!*

Ahora bien: *¿se le ocurre qué puede ser la firma?*

¿Sabe por qué lo pregunto? Es que a esta altura, si me siguió en todo lo que fui escribiendo, creo que usted está en condiciones de 'conjeturar' un candidato (o candidata) a que sea la firma que sirva para confirmar toda la información que figura en el bloque. ¿Quiere pensar un instante para ver si se le ocurre *la idea* que tuvo quien inventó este proceso?

Sigo yo. ¿Se acuerda del algoritmo que 'codificaba' las operaciones? Era el algoritmo que se llamaba SHA-256, ¿recuerda? Uno ponía en la computadora un texto cualquiera, y el algoritmo le asignaba una única palabra de 64 caracteres. Esos 64 caracteres eran elegidos de un alfabeto de 16 letras (en realidad, eran los diez dígitos a los cuales se agregaban las seis primeras letras del alfabeto que usamos en la vida cotidiana: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E y F). Como expliqué anteriormente, ese alfabeto es el que se conoce con el nombre de *hexadecimal*.

En este punto, le pido (una vez más) que me siga con esta idea: la *firma* del bloque que garantiza que todo lo que está escrito es correcto es *codificar toda la información que aparece usando el mismo algoritmo (el SHA-256)*. ¿Qué sucedería? Al ingresar el texto con *todas las operaciones* que figuran en el bloque, el algoritmo le adjudicaría una única palabra de 64 caracteres. ESA PALABRA es justamente la firma del bloque... ¡Y esa es una de las *grandes ideas* del proceso de aparición de los bitcoins y lo que se llama blockchain! ¡La *firma* forma parte del bloque! Y esta firma depende *tanto* de la información que intenta convalidar que —como escribí antes—, si uno intentara hacer cualquier modificación, alteraría la validación.

Pero ahora llega el momento de agregar otra idea que me parece *extraordinaria*. Y si me permite, le pido que no me abandone acá. Créame que la idea que sigue merece toda su atención. Es que termina 'describiendo' lo que ES la blockchain, esta cadena de bloques que estoy comparando con las páginas de un libro que están ligadas de una forma indivisible. Es la *idea* que sirve para explicar cómo hacer para que se acepte que todo lo que está escrito, todas las transacciones, los momentos y el orden en el que se produjeron son correctos.

Acompáñeme por acá.

La firma de la que estuve hablando queda determinada al aplicar el algoritmo SHA-256. Va a aparecer la palabra de 64 caracteres. Usted tiene derecho a preguntarse entonces ¿dónde está lo *impactante*?

Bueno, se pide que esa firma, esa 'palabra', empiece con 18 ceros de entrada[63]. O sea, que la *palabra de 64 caracteres*

---

63. Este número de ceros (18) es válido al día de hoy (25 de mayo de 2019, mientras estoy escribiendo estas líneas), pero a medida que va pasando

que sería la *firma* empiece así (y después, que siga como sea)[64]:

000000000000000000…

Usted debe estar 'desencantada/o' en este momento. ¿Cómo es que *tiene que empezar* con 18 ceros? ¿Cómo hago para cambiar esa palabra si, una vez que yo escribo el texto, el algoritmo lo codifica sin que yo participe? ¿Cómo puedo 'decidir' que esa palabra empiece de *alguna forma particular*?

Justamente, ¿sabe lo que inventaron? Como no se pueden modificar las transacciones, el momento ni la fecha en los que se produjeron, como el *orden* en el que se realizaron también está determinado… entonces ¿qué es lo que se *podría* alterar? Lo que se hace es dejar *una palabra libre*.

Sí, suponga que las transacciones son estas cinco (que voy a inventar), todas el mismo día (digamos el 25 de mayo de 2019), junto con el momento del día y el orden en el que se produjeron:

1) Ignacio le vendió 5 bitcoins a Lorena a las 10.03 pm.
2) Laura le compró 20 bitcoins a Daniel a las 11.17 pm.
3) Andrea le compró 100 bitcoins a Paula a las 3.04 pm.
4) Matías le vendió 20 bitcoins a Santiago a las 3.05 pm.
5) Lucio le compró 10 bitcoins a Alejandro a las 4.14 pm.

el tiempo, puede cambiar. Es decir, cuando usted lea este texto, ese número puede haberse modificado y ahora podrían ser necesarios más ceros. Quizás 18 ya no sean suficientes.

64. Ejemplo de un bloque de diciembre de 2018: 000000000000000000 23019FE2561E97381E57FA9038E88261CBF388815B6C23. Si quiere, verifíquelo acá: https://www.blockchain.com/btc/blocks/1543844840837

Fíjese que estas cinco operaciones pudieron haber tenido origen y/o destinatarios en diferentes partes del mundo. Aunque las identidades de los que originan la transacción y las de los destinatarios son anónimas, las personas que impartieron la instrucción pueden haber estado en Quilmes, en Oslo, en Medellín, en Leeds, en Chicago… Pero lo que quiero enfatizar es que *este tipo de información* (es decir, el LUGAR) *¡no queda registrado!* No solo eso: ni siquiera *importa* dónde sucedió.

Présteme atención a este hecho: lo *único* que queda 'grabado' en la blockchain es:

- Dirección (codificada) del origen
- Dirección (codificada) del destinatario
- Monto de la operación en bitcoins
- Día y hora

¡Y NADA MÁS!

Creo que usted ya entiende que si yo escribiera este texto con las transacciones que se realizaron además del día y la hora, el algoritmo le asignaría una firma que sería esa única palabra de 64 caracteres. Pero ¿cómo podría 'pretender' que esa firma, esa palabra, empiece con *dieciocho ceros*? La respuesta parecería ser: o bien empieza o bien NO empieza con los 18 ceros. No hay *ninguna flexibilidad*. ¿Entonces?

Y aquí es donde quienes 'imaginaron' todo este procedimiento incluyeron una variante: usted tiene la 'libertad' de *agregar* una *palabra cualquiera* a todo el texto, la palabra o símbolo que usted quiera. Puede ser un número, un símbolo, un signo de puntuación, letras minúsculas o mayúsculas, espacios, lo que usted quiera, una *combinación* totalmente arbitraria. Lo increíble es que después de toda la sofisticación de la que estuve hablando, quede

un grado de libertad como para que una persona pueda agregar una palabra cualquiera.

Voy a poner un ejemplo para tratar de explicarme mejor. Suponga que usted, aprovechándose de la libertad que tiene de elegir *una* palabra cualquiera, decidiera que la palabra que va a agregar será *un número*.

Sí, decide que va a agregar —por ejemplo— el número CERO. Después, sigue lo que estaba previsto incluir en la página (o bloque), o sea, la lista de las cinco transacciones[65].

En este instante, aplicando el algoritmo SHA-256 a todo esto que escribí antes, incluido el número cero que usted 'inventó', le 'calcula' la firma.

¿Qué puede pasar? Puede que al aplicar el algoritmo, la palabra de 64 caracteres que le corresponde EMPIECE o NO EMPIECE con 18 ceros.

Si esa firma empieza con dieciocho ceros, ¡listo! ¡Encontró lo que quería! En cambio, si *no empieza* con dieciocho ceros, deja todo como está *salvo* el cero que había agregado al principio, junto con todas las transacciones. Todas las operaciones que tienen que figurar no pueden ser modificadas… la *única variable posible* es modificar ese número cero que usted incluyó. Está claro que usted no puede cambiar las operaciones. Las fechas y horas, tampoco. Entonces, la única variable que le queda es cambiar el número cero que había puesto. ¿Qué hacer? Usted tiene la libertad de inventar o agregar cualquier palabra o número nuevo. Por ejemplo, ahora intenta agregando un número UNO. Obviamente, no hace falta que sea un número uno. Elija lo que quiera. Sigo. Supongamos que usted *prueba* agregando un número

65. Por favor, no se quede con la idea de que pueden ser *cinco* transacciones solamente. En general son *miles* por bloque o por página.

uno. PRUEBA NUEVAMENTE. Ahora obtiene una *nueva* firma. Si esta nueva firma empieza con dieciocho ceros, se termina la operación: ¡encontró lo que buscaba!

Si no, usted ya sabe que no sirve agregar un cero ni agregar un uno. Ahora prueba (por ejemplo), con UNA PALABRA cualquiera (o puede intentar con el número tres, o el número mil, o un signo de pregunta…). Por ejemplo, yo voy a usar la palabra "Argentina". Y pruebo. Si no sirve, intento de alguna otra forma.

Este agregado que uno hace a cada bloque intentando obtener que la firma empiece con dieciocho ceros se llama un *nonce*. Es decir, nonce es el nombre del *agregado*[66]. Por otro lado, este proceso de ir modificando el nonce, buscando que la firma empiece con dieciocho ceros, se llama *minar*. Aunque parezca mentira, este verbo es el que indica 'la prueba de trabajo' (o *proof of work*) que se establece para tratar de 'encontrar' los bitcoins.

No sé si hace falta que le diga que usted —sí, usted— no estará sola/o buscando una firma que empiece con dieciocho ceros. Hay miles de personas en el mundo haciendo lo mismo. Todas están intentando encontrar esa firma para lo cual necesitan ver quién es la primera (o primero) que la encuentra. ESA es la *prueba de trabajo*. Millones de personas 'minando', todas al mismo tiempo[67].

---

66. *Nonce* en inglés quiere decir 'coined for or used on one occasion' (o sea, un número que sirve para una sola ocasión).

67. Para que usted tenga una idea —si le interesa—, creo que merece una pequeña nota aparte aclarar el *grado de dificultad* que significa 'encontrar' un nonce correcto. Básicamente, uno tiene que probar 16^{18} combinaciones en promedio para encontrar uno que sirva. Y acá escribo cuán grande es ese número: 16^{18} = 4.722.366.482.869.645.213.696.

Esta cantidad de cómputos es la que la 'comunidad' de mineros realiza cada 10 minutos.

Las personas que están minando en el mundo buscan el nonce que haga 'válida' la información que figura en el bloque. En el momento que alguien lo logra, *¡lo anuncia al mundo!* A partir de allí, ese particular bloque queda confirmado.

Algunos puntos importantes (y le pido que me siga con cuidado):

a) El minero que encontró el nonce que sirvió para firmar el bloque, y por lo tanto validar todo lo que había escrito en el bloque, *obtiene como recompensa 12 ½ bitcoins*. Luego voy a ampliar la información sobre los bitcoins propiamente dichos, pero piense que el esfuerzo que el minero puso en electricidad, en uso de su (o sus) computadora(s), en esta específica 'prueba de trabajo', es lo que le permite obtener una suerte de 'pago' o 'recompensa', y en lugar de dárselo en dinero de alguna moneda conocida, se lo entregan en bitcoins.
b) En principio, está 'estimado' que el grado de dificultad para encontrar el nonce es de aproximadamente diez minutos. O sea, se 'generan' bitcoins cada diez minutos: algo así como decir que se encuentran *seis nonces por hora*. Es decir, el LIBRO MAYOR o blockchain agrega seis páginas o bloques por hora.

Ahora, una nueva pausa. Quiero utilizarla para agregar *otro hecho extraordinario*. Quizás sea un poco técnico, pero creo que vale la pena incluirlo.

¿Sabe qué se les ocurrió para ofrecer aún más garantías a todo el proceso? Suponga que el blockchain llegó hasta el bloque 435 (por elegir un número cualquiera). Es decir, el LIBRO MAYOR tiene ya 435 páginas.

Llegado a este punto, el mundo de los mineros está tratan-

do de agregar un nuevo bloque, el 436. Para ello, tienen las transacciones que quieren incorporar, las fechas, los horarios y, además, deben buscar el nonce (o la firma que las valide). Pero ¿sabe *qué más*? ¡¡¡Tienen que incluir también la firma del bloque anterior!!!

Es decir, para que el bloque 435 haya sido validado, *algún minero* encontró esa palabra que empezó con 18 ceros, la firma del bloque 435. Bien. Cuando intente ser validado, *¡el bloque 436 deberá incluir la firma del bloque 435!*

De esta forma, si alguien quisiera hacer alguna modificación en un bloque, si quisiera 'alterar' alguna operación, deberá tener el cuidado de incluir la firma del bloque anterior y, por lo tanto, el nonce que servía para el bloque sin alterar ahora ya no sirve más. Tendrá que minar todo de nuevo otra vez; si no, *¡desencadenará ese bloque!*

Lo escribo acá con otras palabras. De paso sirve para *enfatizar la PROFUNDIDAD* de este hecho y la *SEGURIDAD* que agrega: si una persona quisiera 'modificar' un bloque, alteraría inmediatamente la firma del mismo. Por lo tanto, la firma que había antes, con el nonce que habían encontrado los mineros de ese bloque para que la firma empezara con 18 ceros, ahora se verá modificada. Por lo tanto, habría que minar nuevamente ese bloque particular y buscar un 'nuevo nonce', o sea, una nueva firma, lo que afectará al próximo bloque, y así siguiendo.

Moraleja: *la simple modificación de cualquier caracter en un bloque cambia la firma del bloque, lo cual implicará muy probablemente que el nonce que necesiten encontrar los mineros sea diferente del que servía para el anterior (sin modificar), y eso inexorablemente requerirá una nueva firma que deberá empezar otra vez con 18 ceros…*

Como ya escribí antes, se estima que, en promedio, se 'va-

lidan' seis bloques por hora, uno cada diez minutos. Si este número se incrementara y se validaran más bloques en una hora, entonces el algoritmo requeriría que las *nuevas firmas* tuvieran que empezar con *más de dieciocho ceros* y, por lo tanto, los nonces que uno tendría que buscar deberían ser diferentes.

Parte 4 (y última)

Hasta acá, he mencionado los bitcoins solo en forma muy 'tangencial'. Cuando leía y averiguaba cómo funcionaba esta tecnología y qué eran los famosos bitcoins, nunca llegaba entender cómo aparecen, qué son, quiénes los tienen y por lo tanto los pueden entregar, etcétera.

No sé si ahora entendí, pero creo que tengo una idea.

Satoshi Nakamoto[68] es un ciudadano japonés que *supuestamente* 'inventó' los bitcoins. Su identidad (aunque uno tenga el nombre) es una incógnita. No está claro siquiera que sea una sola persona, pero eso daría lugar a otro texto y en otro libro. Lo que me interesa señalar acá es que, quienquiera haya sido el que inventó o creó los bitcoins, hizo lo siguiente:

a) Lo creó en el año 2008, hace poco más de once años.
b) Estableció que *en total habría de haber 21 millones de bitcoins en el mundo*. El primer día que se validó el primer

68. Si bien yo escribí que Satoshi Nakamoto es un ciudadano japonés, pareciera ser que Nakamoto es el seudónimo que usó una persona o un grupo de personas en un foro en internet. Muchos dudan de su nacionalidad, ya que escribe en perfecto inglés y nunca escribió nada en japonés ;-)

bloque, sucedieron varias cosas 'singulares'. En principio, como era el primero de todos, no contenía la firma del bloque anterior entre toda la información que había que 'certificar'. De hecho, es el *único bloque* de todos los que forman la cadena de blockchain que no incluye la firma de otro bloque.

c) Como escribí antes, una vez que uno tiene la información que *no puede modificar* (las transacciones, las fechas, los horarios y la firma del bloque anterior), la única *variabilidad* la ofrece la búsqueda del nonce. ¿Por qué? Para que, cuando uno quiera usar el algoritmo SHA-256 y encontrar la firma de este nuevo bloque, esta firma sea una palabra que *EMPIECE* con 18 ceros.

d) En el año 2008, cuando se empezaron a minar y producir bitcoins, sucedían dos cosas: no era necesario 'pedir' que la firma tuviera *tantos ceros al principio*. Hoy (25 de mayo de año 2019) son dieciocho, pero en aquel momento eran muchos menos: *ocho*. Eso sí: la cantidad de *ceros iniciales* que se requieren para 'validar' la firma se fue incrementando con el tiempo, para aumentar también el *grado de dificultad* y, de esta forma, mantener el ritmo de que se obtengan firmas 'aceptables' con un promedio de seis por hora[69].

e) Cuando un minero encuentra la firma que valida un bloque, *se hace acreedor a un cierto número de bitcoins* (a mayo

69. Una breve nota para proponerle pensar por qué hay que aumentar el grado de dificultad. En principio, hay dos motivos: 1) fue aumentando el poder de cómputo de las computadoras (siguiendo lo que se conoce con el nombre de 'ley de Moore'); 2) fue aumentando la cantidad de mineros y, por lo tanto, la suma del poder de cómputo de todos ellos.

de 2019, son 12,5) que, de alguna manera, comienzan a estar ‘en el mercado’.

f) Hasta el 26 de mayo del año 2019 se habían minado 17.723.450 bitcoins. Representan un 84,397% del total. Se producen a un ritmo de 1.800 bitcoins por día. Quedan en este momento 3.276.550 bitcoins por minar[70]. Naturalmente estos datos se actualizan minuto a minuto, por lo que me siento un poco reticente de escribir estos números que seguramente quedarán desactualizados ni bien yo cambie de renglón, y ni hablar del momento en el que los está leyendo usted. Concédame esa licencia entonces.

g) Usted podría preguntarse: ¿por qué se ha establecido esa cantidad de bitcoins? Al haber determinado un número *fijo* de bitcoins que se van a ‘emitir’, se genera una ‘escasez’ relativa. Es una idea inspirada por la escasez del oro y de materiales preciosos similares (de los cuales hay una cantidad finita sobre la Tierra, y hace falta ‘minar’ para encontrarlos).

h) La recompensa entonces por ‘encontrar’ la firma de un bloque e incorporarlo a la cadena es de 12,5 bitcoins por bloque. Pero esto es ‘ahora’. En el comienzo (en el año 2008), esa recompensa era de 50 bitcoins, y eso duró hasta el 28 de noviembre de 2012. Como ya se habían minado los 210.000 bloques previstos, el ‘premio’ en bitcoins se redujo a la mitad, y pasó a ser de 25 bitcoins por bloque creado (y adjuntado a la blockchain). Desde noviembre de 2012 hasta el 10 de julio de 2016, se entregaron 25 bitcoins por

70. Ver: a) https://www.blockchain.com/es/charts/total-bitcoins; b) https://www.buybitcoinworldwide.com/how-many-bitcoins-are-there/

bloque agregado[71]. Esto implica que el número de bitcoins minados por día se redujo de 3.600 a 1.800. La idea es minar 144 bloques diarios[72].

i) Acá hay otro tema importante: cuando se dejen de entregar bitcoins por agregar bloques a la blockchain, se necesitará otro incentivo para que los participantes inviertan poder de cómputo en agregar bloques (y hacer funcionar el sistema). Ese nuevo incentivo ya fue pensado por los diseñadores del protocolo de bitcoin: es la posibilidad de cobrar *transaction fees* o sea, comisiones por transacción. El minero que agrega un nuevo bloque a la cadena cobrará las comisiones de todas las transacciones incluidas en el nuevo bloque.

j) Si seguimos a este ritmo, el último bitcoin se entregará alrededor del año 2140. Naturalmente uno podría preguntarse: "¡Un momento! Y a partir de entonces, ¿qué sucede?". Bueno, la idea es la misma que se usa en el mundo con cualquier moneda. ¿Qué quiero decir con esto? Si usted toma —por ejemplo— un peso argentino, existen monedas de distintas valoraciones: 50 centavos, 10 centavos, 5 centavos, 1 centavo, etcétera. Uno podría replicar esta idea y hacer lo mismo con los bitcoins. Podría dividir los bitcoins por la mitad, o por 10, o por 100, por 1.000… De hecho, en teoría, quienes entienden de este tema, escriben que la idea es 'partir' cada bitcoin hasta en *cien millones*. Es decir, uno podría operar pagando con una 'unidad' que llegaría a ser el equivalente de *una cienmillonésima de bitcoin*[73].

---

71. Ver https://en.bitcoin.it/wiki/Controlled_supply

72. Si le interesa, puede verificar estos datos en https://en.bitcoin.it/wiki/Block

73. Esa *cienmillonésima parte de un bitcoin* ya tiene nombre: se llamará

Estamos lejos aún, y estoy 'casi' seguro de que yo no voy a vivir en ese momento, así que si este procedimiento no es cierto en el año 2140, tendrá que 'reclamarle' a alguna otra persona (y no a mí).

Notas

1) Los datos que aparecen en toda la blockchain son siempre *públicos y accesibles* para todo que todo el mundo los pueda ver. Este concepto es fuertemente 'revolucionario', porque permite que *toda persona* pueda llevar un registro de *todas las operaciones* que se produjeron, las fechas, los horarios y el orden en el que se concretaron.

2) La seguridad involucrada permite decir —por ejemplo— que si yo comprara un departamento y agregara una *foto* de ese departamento con el contrato de compra, yo podré demostrar *siempre*, por los tiempos de los tiempos, que fui el poseedor de ese departamento en ese momento. Nadie lo puede modificar.

3) En el momento en el que estoy escribiendo estas líneas, año 2019, el LIBRO MAYOR (o sea, la blockchain) tiene 556.728 bloques[74]. La información que guardan estos bloques consiste en *todas las transacciones que se hicieron en la historia desde que existen los bitcoins*.

SATOSHI, en memoria del 'creador' o 'inventor' de los bitcoins. Entonces, si bien el número de bitcoins quedará siempre fijo en 21 millones, la cantidad de divisiones que se podrán obtener llegará a 2.100.000.000.000.000, o sea, 2.100 billones. Debería haber bitcoins (o fracciones de ellos) para todo el mundo. Si le interesa avanzar e investigar un poco más sobre el tema, le sugiero que visite la página web: http://www.bitcoinclock.com

74. Lo que significan 'casi' 512.190 MB.

4) La *función* que le asigna a cada texto la *palabra de 64 caracteres* de este nuevo idioma en el que se encriptan o codifican todos los textos se llama SHA-256. Me importa enfatizar lo siguiente: *Si usted me diera el texto que describe todas las transacciones que figuran en un bloque, sería muy fácil encontrar cuál es la 'palabra' o la firma*[75]*. En cambio, si yo le doy una palabra cualquiera de este 'idioma' (de longitud 64) es imposible volver para atrás y determinar cuál es el texto del cual proviene.*

5) Hay otra pregunta que cabe hacerse: ¿habrá dos textos diferentes que puedan tener la *misma* firma? Es decir, ¿puede que haya dos bloques distintos a los que les corresponda la misma palabra? La respuesta es un ¡no! rotundo.

6) Si bien hay *muchísimas funciones* de encriptación (que se llaman *funciones hash*), la que se usa para el Bitcoin Blockchain es SHA-256.

7) El sistema blockchain está totalmente descentralizado. No hay ninguna 'autoridad' central que supervise ni monitoree ninguna transacción. Son *todos* los integrantes los garantes de que lo que se escribió fue validado, o dicho de otra forma, de que cada bloque que se agrega ha sido revisado (y aprobado) por *todos*.

8) Si a lo largo del artículo se preguntó *cuántos mineros hay*, la respuesta tentativa es que son alrededor de 200 mil, pero como hay varias organizaciones intentando minar bitcoins, si todas tuvieran el mismo número de personas trabajando, la estimación es

75. Por supuesto, sin el nonce adecuado, la palabra no tiene por qué empezar con dieciocho ceros.

que hay cerca de un millón de individuos tratando de 'encontrar' bitcoins.

9) Al ritmo actual (otra vez, año 2019), hacen falta minar 915.787 bitcoins hasta que la recompensa se divida por la mitad una vez más. En ese momento, pasará de los 12,5 bitcoins actuales a 6,25.

Para terminar, un ejemplo de la 'vida real'. La transacción que copio a continuación sucedió el 29 de diciembre en la blockchain:

Transacción: 224ea12b6e46c8765587efa50be1149be50b741d67a53 fff84550170868f6369
Fecha y hora: 2018-12-29 00:03:24
Origen: 367f4YWz1VCFaqBqwbTrzwi2b1h2U3w1AF
Destinatario 1: 367f4YWz1VCFaqBqwbTrzwi2b1h2U3w1AF
Monto 1: 0.02435555 BTC
Destinatario 2: 3LAaM41U768MdgX5sG8mPt7StFbsR4dunA
Monto 2: 0.0910866 BTC
Monto total: 0.11544215 BTC

En este caso, el origen le pagó a dos destinatarios distintos en una misma transacción.

Notas complementarias

1) Técnicamente, es pseudoanónima. Si bien no hay una identidad 'real' con nombre y apellido asociada a una dirección de bitcoin, lo que *sí* se puede hacer es —eventualmente y si fuera necesario— rastrear a qué otras direcciones de bitcoin esa direc-

ción de origen envía sus monedas. En ese sentido, si hubiera algún tipo de actividad ilícita, justamente Bitcoin permite *seguir la ruta del dinero* mucho más fácil que 'el dinero en efectivo o cash', aunque no revele muchos datos sobre el tenedor de las monedas. Esto es importante para oponerse a la idea de que los bitcoins se usan solamente para la *evasión* y el *lavado de dinero*. Dicho esto, Bitcoin es un sistema *que no requiere de permisos*: no pide credenciales ni revisa la reputación para poder acceder a él. Los bancos del mundo así como funcionan hoy tienen políticas que se conocen con el nombre KYC/AML, que son las siglas en inglés de: KNOW YOUR CLIENT (*conozca a su cliente*) / ANTI MONEY LAUNDERING (*antilavado de dinero*). Pero de esta forma, y con esta 'excusa', nunca le 'abren el juego' al 80% de la sociedad. Es una suerte de 'juego excluyente y señorial' por diseño.

2) En su trabajo original, Satoshi 'resuelve' específicamente este punto: ¿cómo sincronizar un libro contable entre varios 'nodos' en un contexto *asincrónico* (internet)? En matemática, es conocido como 'El problema de los generales bizantinos'. La idea es la siguiente: suponga que varios generales reciben la *misma* orden pero *no* al mismo tiempo, ya que el campo de batalla (internet) hace que las instrucciones les lleguen en diferentes momentos, primero a uno (o unos) y luego a otros, des-sincronizándolos. Para resolver este problema, Satoshi dice que cada nodo debe hacer el *proof of work*, o sea, la 'prueba de trabajo', para demostrar que invirtió una X cantidad de *cómputo* en pos de *sincronizarse* con el resto de los nodos de la red. La gran innovación son los siguientes tres logros:

a) bitcoin como incentivo para los que aportan cómputo;

b) la blockchain como memoria distribuida de la economía *descentralizada*; y
c) *proof of work*, como algoritmo para *sincronizar* los nodos.

Los mineros reciben bitcoins como incentivo por su trabajo. De esa forma, se garantiza que aportan X cantidad de cómputo, que en rigor está resolviendo la *veracidad* de la transacción. Es decir, aportan *seguridad* a la red. Si la red ES segura, entonces ES confiable.

3) Una nota de color. El algoritmo que se conoce como *proof of work* está basado en otro llamado *hashcash*. Este último era usado para evitar el SPAM. Justamente como copiar información no tiene costo, exigir que la computadora 'invierta' cierta cantidad de *cómputo*, aplicar *hashcash* o *proof of work*, debería darle un *costo artificial* a una operación. Satoshi le encontró un uso mucho más apropiado que el de solamente prevenir el SPAM (o ponerle costo al mail) con *su* versión de *proof of work*.

4) Si usted quiere 'ver' una transacción, fíjese aquí: https://www.blockchain.com/btc/tx/b0ec0e2266f58848e97ea6179b10a705c83ef26f3ab000fb41585d5583412d3a

5) Dos personas han tenido una incidencia *brutal* en estos textos. Uno es Carlos Sarraute y el otro, Santiago Siri. Sin ellos, no hubiera podido escribir esta serie de artículos. Atribúyales a ellos todo lo que entendió. Todo lo que le resultó confuso es mi culpa. Dicho esto, Santi me hizo una observación que 'copio' literalmente acá: "Adrián, no te olvides en señalar que cada *minero* recibe un *fee* (que en inglés significa 'pago' o 'recompensa') por cada transacción en la que participa, en función de la cantidad

de bits que contiene (la transacción). Es lo que se llama ‘satoshis per byte’”.

A continuación incluyo un intercambio que tuve con Carlos D’Andrea. Necesito ‘avanzar’ en contestar las preguntas, pero por ahora pongo el texto ‘en crudo’.

Hola, Adrián:
Finalmente pude sentarme a leer con calma tu artículo de los bitcoins (me lo había llevado a Gran Canaria pero me tocaron cosas del trabajo por resolver así que no tuve mucho tiempo) y aquí van mis comentarios.
Al final de la lectura considero que aprendí varias cosas (que son bitcoins/blockchains/minería, etc.,. etc., etc.)
A. P.: Esto es —creo— lo más importante que me queda, porque yo también, después de haber leído y haber escrito, entiendo cosas que antes no entendía, pero como vos decís más adelante, me queda muchísimo por entender. El otro día, hablando con Santiago Siri (te hable de él, ¿no es así?), me sugirió que leyera un libro, que ya compre en Amazon, y me dijo que allí están contestadas muchas de las preguntas (y muchas más) sobre lo que yo no entiendo. Pero ahora, en este momento, ponerme a leer y/o estudiar un libro sobre bitcoin no está entre mis prioridades, pero tengo el libro, y sé que en algún momento lo voy a hacer… te tengo informado.
Pero aun así me quedan algunas dudas que no se bien cómo se explican ni qué tan fácil/difícil son, ni si era tu objetivo explicar eso también en estas notas:
*) ¿Por qué es necesario o relevante que haya que cambiar la ‘firma del escribano’ cada vez que se modifica una operación?
A. P.: Esta pregunta —creo— puedo contestarla, y creo que habría que aclararlo en el texto. En el momento que alguien ‘cambia’ el contenido de la página, para poder incorporarlo a la blockchain, hará

falta minar de nuevo hasta encontrar una que empiece con esos 18 ceros. Para ello, habrá que ir cambiando el nonce hasta que aparezca lo que uno quiere. ESA va a ser la nueva firma (del 'supuesto' escribano) y, por lo tanto, al cambiar la información, cambia el nonce y cambia todo. Al menos, eso fue lo que entendí yo…

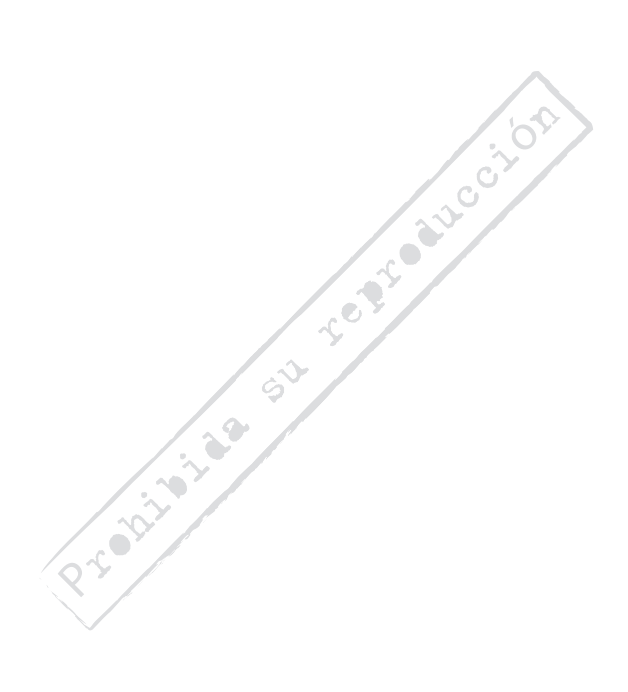
*) ¿Por qué hay que poner un conjunto de 18 ceros seguidos para conseguir un bitcoin?

A. P.: Me parece que no es que uno TENGA que poner un conjunto de 18 ceros, sino que la información es inmodificable, la fecha y hora también. El ÚNICO grado de libertad que queda es ese 'nonce' con el que uno 'va probando'. Aplica el algoritmo y se fija si la palabra que obtiene con ESE particular nonce EMPIEZA (o no) con 18 ceros. Si NO EMPIEZA, uno cambia el nonce y prueba de nuevo. Eso es —esencialmente— estar MINANDO. Para poder incorporar la información a la cadena, uno necesita encontrar algún nonce que haga que al aplicar el SHA-256, el resultado sea una palabra que empiece (al menos hasta hoy) con 18 ceros. Si no empieza, hay que cambiar el nonce. Si uno la encuentra, entonces LISTO, ya queda 'validada como proof of work'. Una vez más, esto fue lo que YO ENTENDÍ…

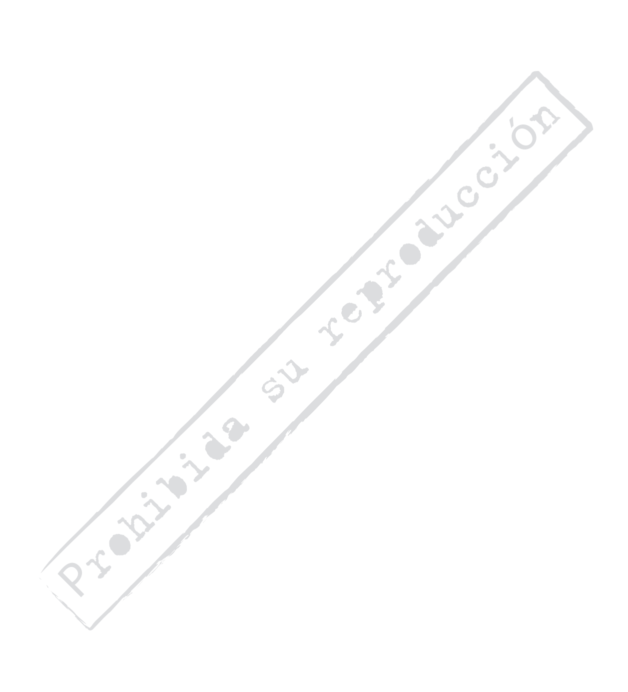
*) ¿Por qué este sistema aparentemente complicado es el que va a reemplazar el del dinero actual? Así como está presentado parece ser un sistema diseñado por unos iluminados para divertirse un rato y poca cosa más. En analogía con el sistema actual de papel moneda + bancos + etc., es cierto que el ciudadano 'promedio' (yo, por ejemplo) no entiende muy bien por qué un papel que dice 5 € realmente vale eso, ni tampoco qué es lo que hace subir o bajar la relación euro/dólar, pero por otro lado el sistema parece simple y fiable, y de hecho es cierto que la parte de 'fiable' la pone la gente al utilizarlo. ¿Por qué los bitcoins así como fueron diseñados tendrían que acabar siendo aceptados como 'simples' y 'fiables'?

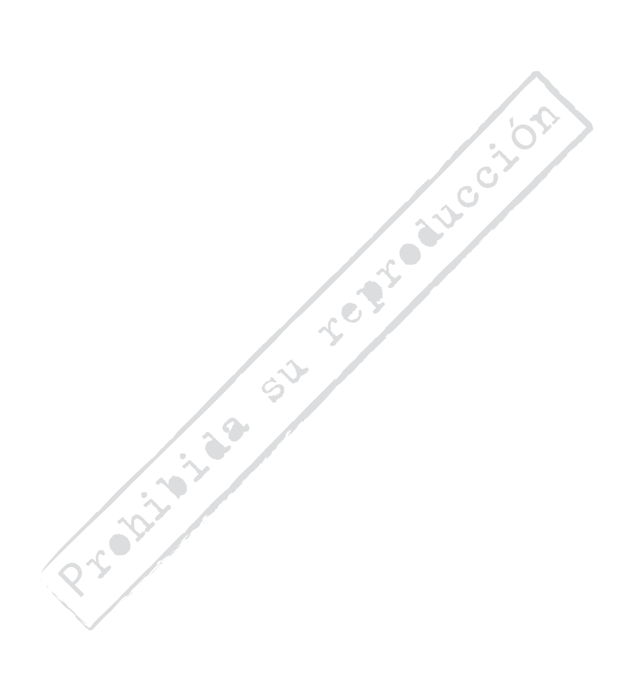
A. P.: Esta pregunta sí que no sé cómo contestarla… Acá es una materia OPINABLE y NO matemática, al menos, es lo que veo desde 'afuera'…

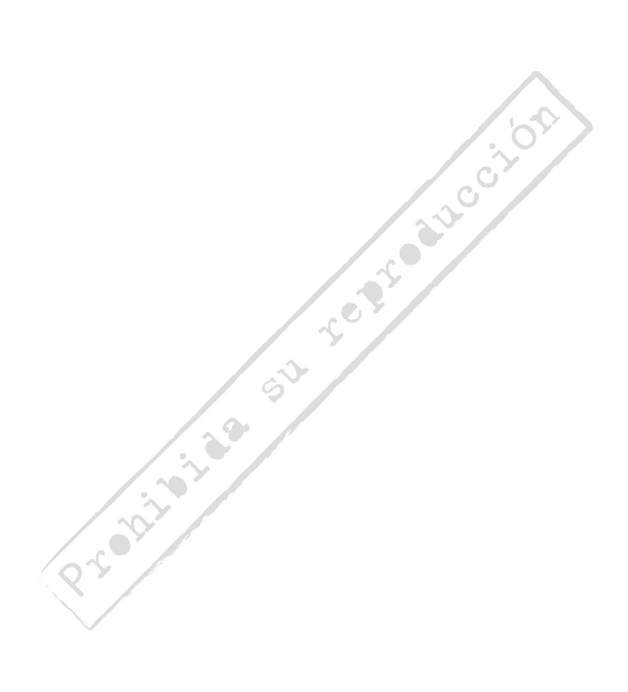
*) ¿Quién 'mantiene' el programa? ¿Se lo puede modificar o no? ¿Con qué tipo de reglas?
A. P.: Otra pregunta más que no sé contestar, pero voy a averiguar…
Quizás sea bueno que el artículo deje más preguntas abiertas, no lo sé. Pero sí que me ha entretenido leerlo… ¡Gracias por compartirlo conmigo!
A. P.: No tengas dudas de que está bueno que deje preguntas abiertas y, POR FAVOR, *no me agradezcas que lo haya compartido contigo. En todo caso, permitime agradecerte a vos que* COMPARTAS TU TIEMPO CONMIGO.

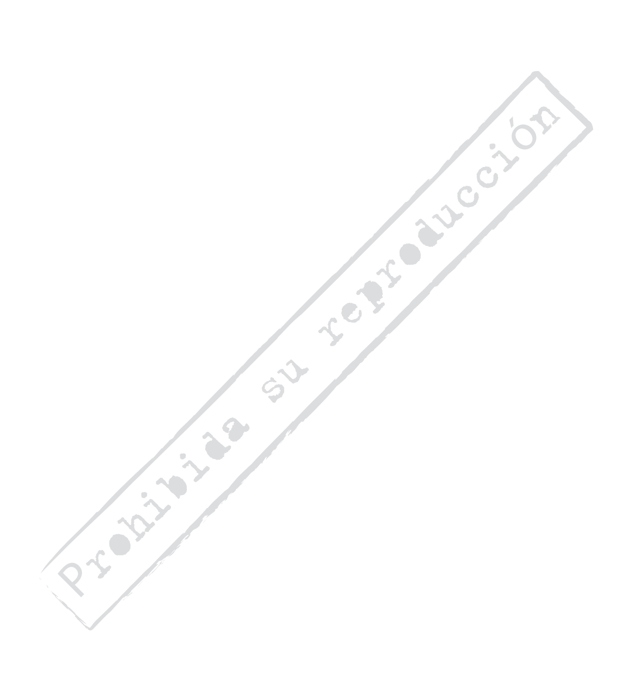


Índice




Prohibida su reproducción




Prohibida su reproducción